

คำชี้แจง

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนปัจจุบันให้สอดคล้องกับแนวทางการปฏิรูปการศึกษาของประเทศที่ประสงค์ให้ครูคณิตศาสตร์ทั่วประเทศใช้เทคโนโลยีสารสนเทศ ช่วยในการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนนั้นเป็นปัญหาใหญ่ของครูคณิตศาสตร์ที่มีความรู้ความสามารถสูงในการสอนคณิตศาสตร์ เชี่ยวชาญในเนื้อหา แต่ยังไม่มีแนวคิดว่าจะต้องดำเนินการอย่างไรกับเทคโนโลยีหรือกับคอมพิวเตอร์ ด้วยธรรมชาติของวิชาที่แตกต่างไปจากวิชาอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เนื้อหาที่มีความเป็นนามธรรมสูง ตัวอย่างแนวทางการจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ที่ให้ความรู้ครูถึงบทบาทของตน บทบาทของนักเรียนในชั้นเรียน นอกชั้นเรียนในการใช้เทคโนโลยี จึงมีความจำเป็นสูงในช่วงเริ่มต้นของการเปลี่ยนแปลงวิธีการดังกล่าว

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ตระหนักถึงปัญหาดังกล่าวของครูคณิตศาสตร์จึงได้จัดซื้อลิขสิทธิ์โปรแกรม **The Geometer's Sketchpad** และแปลโปรแกรมดังกล่าวเป็นภาษาไทยเพื่อให้ครูและนักเรียนสามารถใช้โปรแกรมนี้ในการเรียนรู้ และการสอนได้ง่ายและสะดวกขึ้น นอกจากนี้ยังได้เปิดการอบรมเชิงปฏิบัติการให้ครูคณิตศาสตร์สามารถใช้โปรแกรมดังกล่าวในการส่งเสริมการเรียนรู้ของนักเรียนได้คล่องแคล่วในเวลาอันรวดเร็ว เพื่อให้เห็นตัวอย่างในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในห้องเรียนให้สอดคล้องกับการปฏิรูปการเรียนรู้ บทบาทของครูและนักเรียนในชั้นเรียน เพื่อให้นักเรียนบรรลุมาตรฐานการเรียนรู้ด้านทักษะ / กระบวนการทางคณิตศาสตร์

เอกสารเล่มนี้เป็นเอกสารประกอบการจัดอบรมเชิงปฏิบัติการ การใช้โปรแกรม **The Geometer's Sketchpad** เพื่อพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ที่สสวท. จัดทำขึ้นเพื่อเป็นแนวทางในการเผยแพร่ความรู้ด้านการใช้เทคโนโลยี ช่วยในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์อย่างมีประสิทธิภาพ

สถาบันขอถือโอกาสนี้ขอบคุณ นายदनัย ยังคง นางเพ็ญพรรณ ยังคง นางชมัยพร ตั้งตน นายสมนึก บุญพาไสว นางกรองทอง ตริอาภรณ์ นางแจ่มจันทร์ ศรีอรุณรัศมี นายถนิม ทิพย์ผ่อง นายอลงกต ไหมด้วง ที่ใช้ความพยายามอย่างยิ่งในการจัดทำเอกสารเล่มนี้ขึ้นเพื่อประโยชน์แก่เพื่อนครู เพื่อเป็นตัวอย่าง และแนวทางลัดในการศึกษาวิธีใช้ โปรแกรม **The Geometer's Sketchpad** ช่วยในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

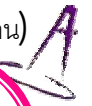
หวังว่าเอกสารเล่มนี้จะเป็นประโยชน์ให้ครูได้นำประสบการณ์ที่ได้ไปเป็นแนวทางจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในรายวิชาอื่น ๆ ต่อไป

(นางพรพรรณ ไทหยางกูร)

ผู้ช่วยผู้อำนวยการ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

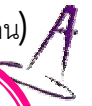




สารบัญ

	หน้า
1. คำชี้แจง	2
2. การใช้ GSP ในการสอนเรื่องการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต	5
3. การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยใช้เมนูสร้าง	11
- สร้างมุมที่มีขนาด 90° , 45° , 60°	11
- สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวของด้านเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้	16
- สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	17
- สร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน	18
4. การสร้างตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้าง ความยาว พื้นที่ เส้นรอบรูป ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก	19
5. การสร้างส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมที่เส้นรอบวง	20
6. การเคลื่อนไหวจุดและเส้น	22
7. การแปลงทางเรขาคณิต	23
- การสะท้อน	23
- การหมุน	23
- การเลื่อนขนาน	24
- เทสเซลเลชัน	31
- การย่อ/ขยาย	32
8. การสร้างรูปเรขาคณิตที่มีขนาดคงที่	35
9. การสร้างตัวเลื่อน (Slider)	36
10. การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต	38
11. การสร้างเครื่องมือกำหนดเอง	39
- รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีขนาดคงที่	41
12. การนำเครื่องมือกำหนดเองไปใช้	42
- การสร้างสื่อแสดงจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ	43
- การสร้างสื่อแสดงความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในทฤษฎีบทพีทาโกรัส	44
13. แผนภูมิรูปวงกลม	48





	หน้า
14. การสร้างสื่อการสอนเรื่อง ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับพื้นที่ที่มากที่สุด	46
15. การสร้างสื่อแสดงภาพการเปิดกระดาะ	51
16. การสร้างสื่อแสดงภาพกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก	52
17. การสอนเรื่อง กราฟของสมการเส้นตรง	54
18. การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์	58
19. กราฟของฟังก์ชันอดิศัย	60
20. การสร้างสื่อการสอนเรื่องฟังก์ชัน	61
21. การสร้างสื่อการสอนเรื่องเวกเตอร์	63
22. การสร้างสื่อเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน	68
23. การสร้างสื่อสำหรับการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน	70
24. การสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้	72
25. การสร้างกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน	74
26. การสร้างกราฟของอสมการ	76
27. การสร้างสื่อการสอนเรื่องเมทริกซ์	80
28. ภาคผนวก	82
- ผู้จัดทำ	
- เอกสารอ้างอิง	



การใช้ GSP ในการสอนเรื่องการสร้างพื้นฐานทางเรขาคณิต

การสร้างรูปเรขาคณิตที่เป็นพื้นฐานของการศึกษาเรขาคณิตนั้น สามารถทำได้ด้วยวงเวียน และเส้นตรง การใช้ GSP ในการช่วยสอนการสร้างพื้นฐานนี้ ครูสามารถตรวจสอบร่องรอยการสร้างของนักเรียนได้จากคำสั่ง แสดงสิ่งที่ซ่อนไว้ทั้งหมด ในเมนูแสดงผล

การสร้างรูปเรขาคณิตต้องอาศัยความรู้เรื่องการสร้างพื้นฐาน 6 แบบ คือ

1. การสร้างส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
2. การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้
3. การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้
4. การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้
5. การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้
6. การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้

การสร้างส่วนของเส้นตรงที่ยาวเท่ากับความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

ให้ AB เป็นส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

1. กำหนดจุดอิสระใดๆ 1 จุด บริเวณที่ว่าง สมมติชื่อ จุด C

2. เลือกจุด C และส่วนของเส้นตรง AB ..>ที่เมนูสร้าง

เลือกคำสั่ง วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี

จะได้วงกลมที่มี C เป็นจุดศูนย์กลาง มีรัศมียาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง AB

3. เลือกเส้นวงกลม C ..>ที่เมนูสร้าง

เลือกสร้างจุดบนเส้นรอบวง สมมติชื่อจุด D

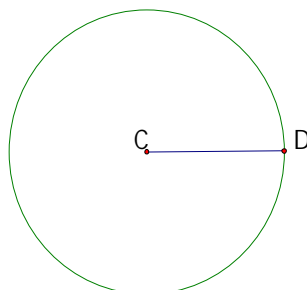
จากนั้นลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางกับจุดอิสระ D จะได้ ส่วนของเส้นตรง CD

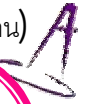
มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง AB ตามต้องการ

4. ซ่อนส่วนที่ไม่ต้องการโดยเลือกอีบเจกต์นั้นๆ แล้ว เลือกที่เมนูแสดงผล → ซ่อนอีบเจกต์

ส่วนของเส้นตรงที่กำหนด

A _____ B





การแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้ ทำได้โดยการหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่กำหนด

ให้ AB เป็นส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

วิธีหาจุดกึ่งกลาง

1. สร้างส่วนของเส้นตรง XY ให้ยาวพอสมควร (เพื่อกำหนดเป็นความยาวรัศมีของวงกลม)



2. สร้างวงกลมโดย

..> เลือกจุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม เลือกส่วนของเส้นตรง XY เป็นรัศมี

เลือกเมนูสร้าง และเลือกคำสั่ง วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี

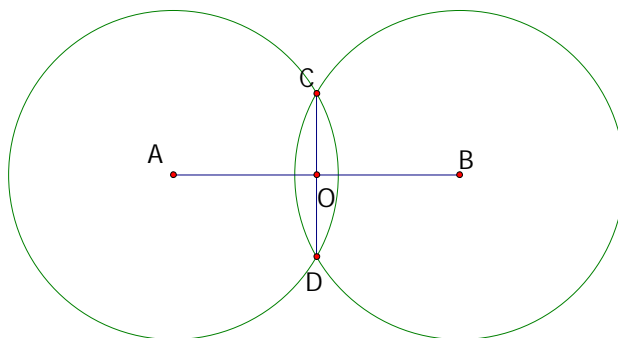
จะได้วงกลม A และวงกลม B ตัดกัน

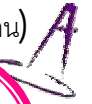
3. ที่เมนูสร้าง ..> สร้างจุดตัดของวงกลมทั้ง 2 วง คือที่จุด C และจุด D

4. สร้างส่วนของเส้นตรง CD และสร้างจุดตัด ส่วนของเส้นตรง CD กับส่วนของเส้นตรง AB

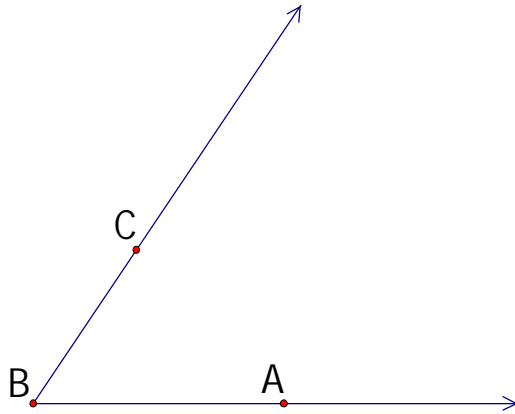
ตั้งชื่อเป็นจุด O

5. จะได้ O เป็นจุดแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรง AB ที่กำหนด



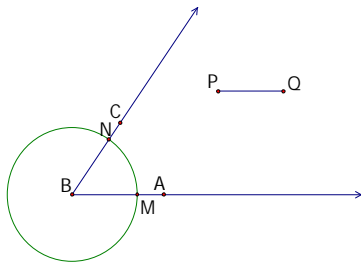


การสร้างมุมให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุมที่กำหนดให้
กำหนดมุม ABC ดังรูป

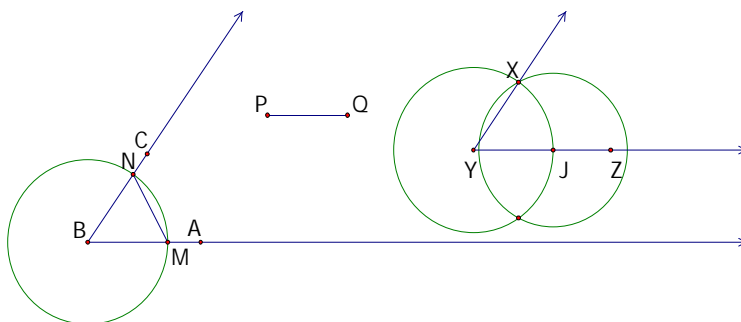


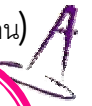
สร้างมุม XYZ ให้มีขนาดเท่ากับขนาดของมุม ABC ทำได้ดังนี้

1. สร้างรังสี YZ เพื่อสร้างมุมและส่วนของเส้นตรง PQ เพื่อกำหนดเป็นรัศมีวงกลม
2. คลิกที่จุด B และส่วนของเส้นตรง PQ สร้างวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี จากเมนูสร้างหาจุดตัดของวงกลมกับรังสี AB และรังสี BC ตั้งชื่อจุด M และจุด N ตามลำดับ



3. ใช้ Y เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี PQ สร้างวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี ตัดรังสี YZ ที่จุด J
4. ใช้จุด J เป็นจุดศูนย์กลางและส่วนของเส้นตรง MN เป็นรัศมีวงกลม เขียนวงกลมตัดเส้นรอบวงของวงกลม Y ที่จุด X ลากรังสี YX
จะได้มุม XYZ ซึ่ง $m(\angle XYZ) = m(\angle ABC)$

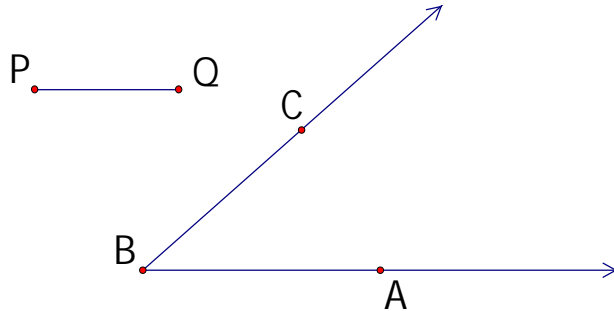




การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้

ให้ มุม ABC เป็นมุมที่กำหนดให้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง PQ เพื่อให้เป็นรัศมีของวงกลม



2. เลือกจุด B เป็นจุดศูนย์กลาง และเลือกส่วนของเส้นตรง PQ เป็นรัศมี

...>ที่เมนูสร้าง เลือกวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและ รัศมี

จะได้วงกลมที่มี B เป็นจุดศูนย์กลาง

3. เลือกเส้นรอบวงของวงกลม B และรังสี BA (รังสี BC)

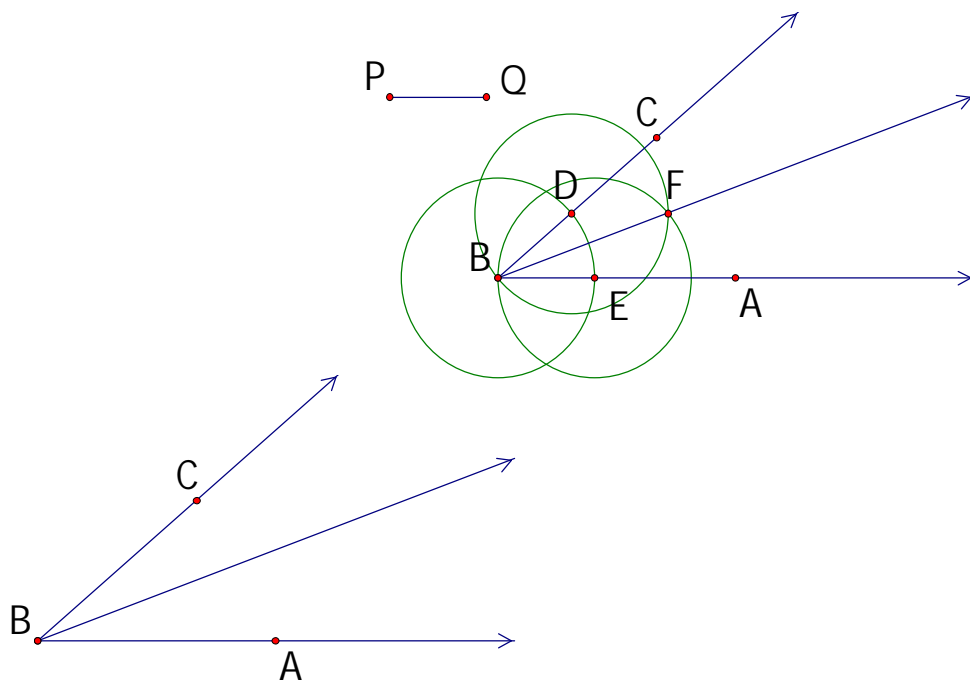
...>ที่เมนูสร้าง สร้างจุดตัดของวงกลมกับรังสี ตั้งชื่อเป็นจุด E (และ D ตามลำดับ)

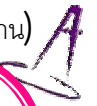
4. เลือกจุด E และจุด D เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกรัศมีเท่ากับส่วนของเส้นตรง PQ

...>ที่เมนูสร้าง สร้างวงกลม จะได้วงกลม 2 วงตัดกัน

5. ...>ที่เมนูสร้าง สร้างจุดตัดของวงกลม E และวงกลม D ให้ชื่อจุด B และ F จากนั้นสร้างรังสี BF

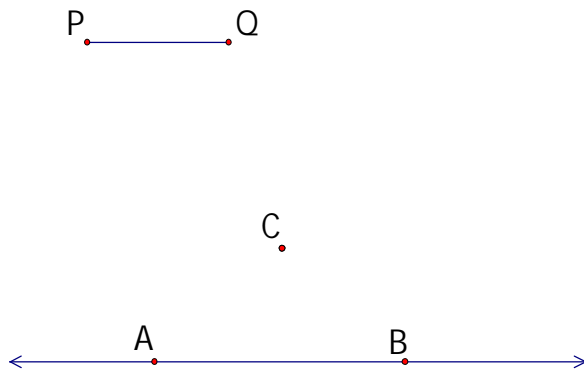
6. ...>ที่เมนูแสดงผล ซ่อนขั้นตอนการสร้าง



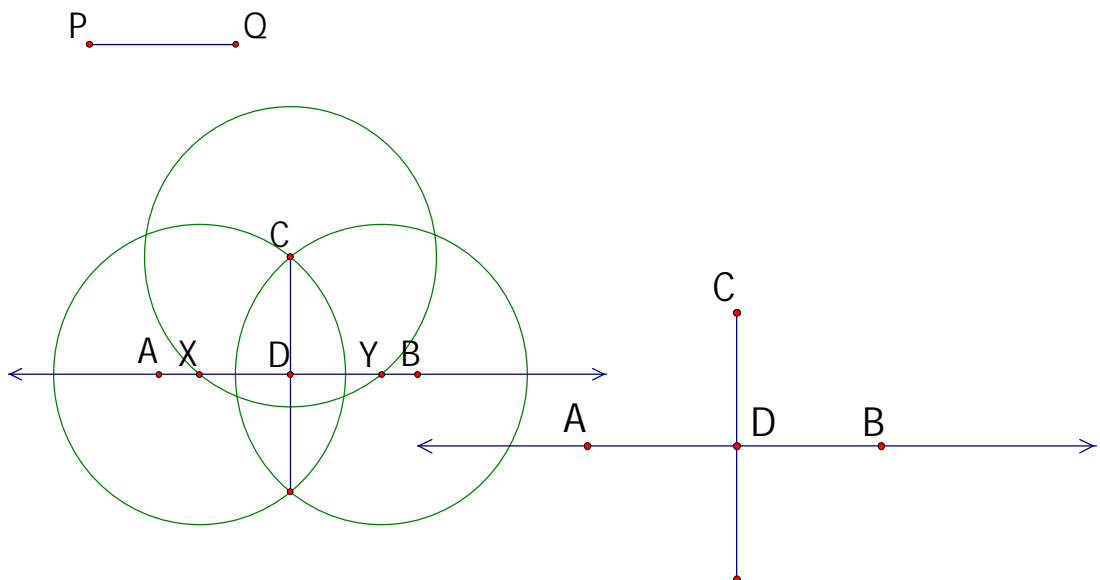


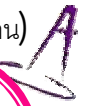
การสร้างเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกมายังเส้นตรงที่กำหนดให้

1. กำหนดเส้นตรง AB และ สร้างจุดอิสระอีก 1 จุดสมมติชื่อจุด C อยู่ห่างจากเส้นตรง AB พอสมควร



2. สร้างส่วนของเส้นตรง PQ เพื่อกำหนดเป็นรัศมี
3. เลือกจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกส่วนของเส้นตรง PQ เป็นรัศมี
...>ที่เมฆูสร้าง สร้างวงกลมจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
จะได้วงกลม C ตัดเส้นตรง AB ..>ที่เมฆูสร้าง สร้างจุดตัด สมมติชื่อจุด X และ Y
4. เลือก X และ Y เป็นจุดศูนย์กลาง เลือกส่วนของเส้นตรง PQ เป็นรัศมี
...>ที่เมฆูสร้าง สร้างวงกลม 2 วง ..>สร้างจุดตัด สมมติชื่อจุด C และจุด S
5. ลากส่วนของเส้นตรง CS ตัดส่วนของเส้นตรง AB สมมติชื่อจุด D จะได้ส่วนของเส้นตรง CD ตั้งฉากกับ
เส้นตรง AB ที่จุด D ตามต้องการ
6. ซ้อนขั้นตอนการสร้าง

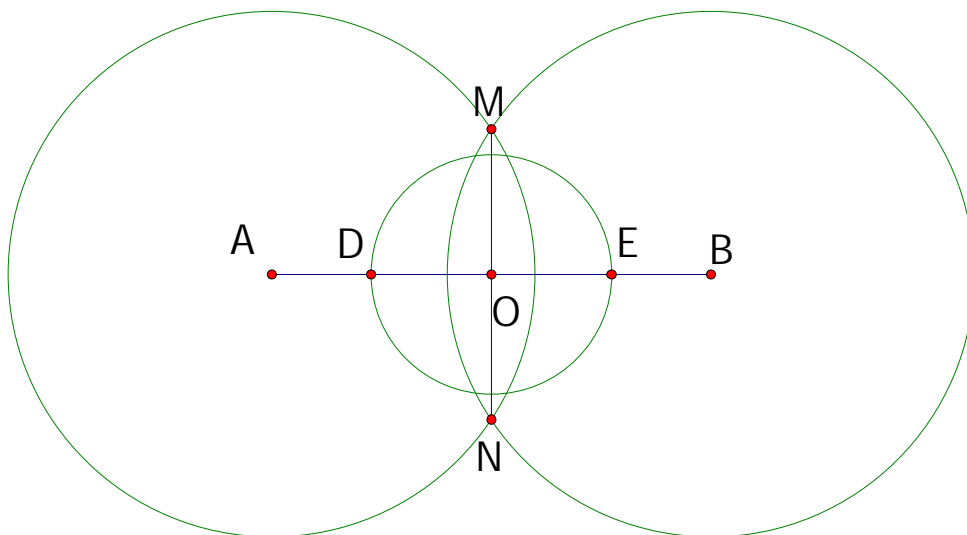
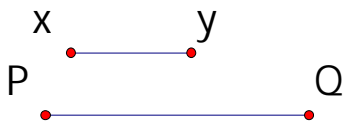


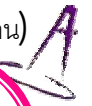


การสร้างเส้นตั้งฉากที่จุดจุดหนึ่งบนส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

กำหนดส่วนของเส้นตรง PQ และส่วนของเส้นตรง XY เพื่อเป็นรัศมีของวงกลม

1. เส้นตรง AB เป็นส่วนของเส้นตรงที่กำหนด C เป็นจุดๆหนึ่งบนเส้นตรงที่กำหนดให้
2. เลือกจุด C เลือกส่วนของเส้นตรง XY
...>ที่เมนูสร้าง เลือกวงกลมสร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี ได้วงกลม 1 วง
3. เลือกเส้นรอบวงและส่วนของเส้นตรง AB
...>ที่เมนูสร้าง เลือกสร้างจุดตัด ตั้งชื่อเป็นจุด D และ E
4. เลือกจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และเลือกรัศมียาวเท่ากับ PQ เขียนวงกลม ที่เมนูสร้าง
เลือกจุด E เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และเลือกรัศมียาวเท่ากับ PQ เขียนวงกลม ที่เมนูสร้าง
5. เลือกเส้นรอบวงของวงกลม D และ E ..>ที่เมนูสร้าง เลือกจุดตัดของวงกลมทั้งสองวง
ตั้งชื่อเป็นจุด M และ N ลากส่วนของเส้นตรง MN เชื่อมจุดตัดนั้นผ่านจุด O
6. จะได้ ส่วนของเส้นตรง MO ตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB ตามต้องการ

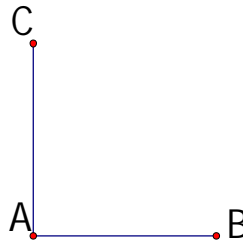
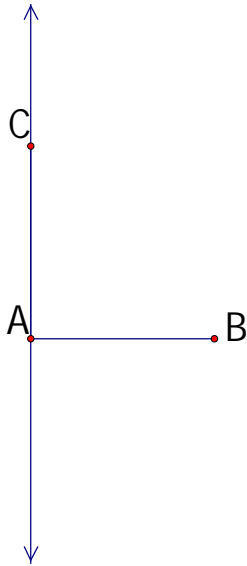




การสร้างรูปเรขาคณิตอย่างง่ายโดยใช้เมนูสร้าง

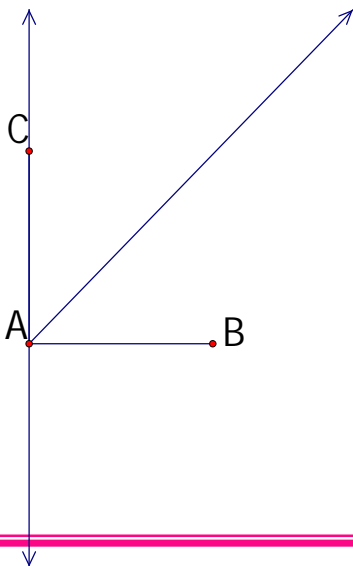
การสร้างมุมที่มีขนาด 90°

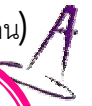
1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. เลือกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB สร้างเส้นตั้งฉากจากเมนูสร้าง คำสั่งสร้างเส้นตั้งฉาก
3. สร้างจุดอิสระบนเส้นตั้งฉากที่สร้าง ตั้งชื่อจุด C
4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A และ C
5. ซ่อนส่วนที่ไม่ต้องการแสดง



การสร้างมุมที่มีขนาด 45°

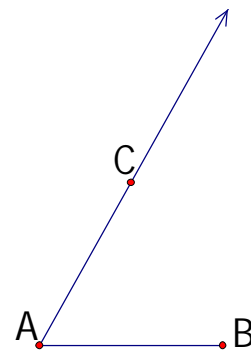
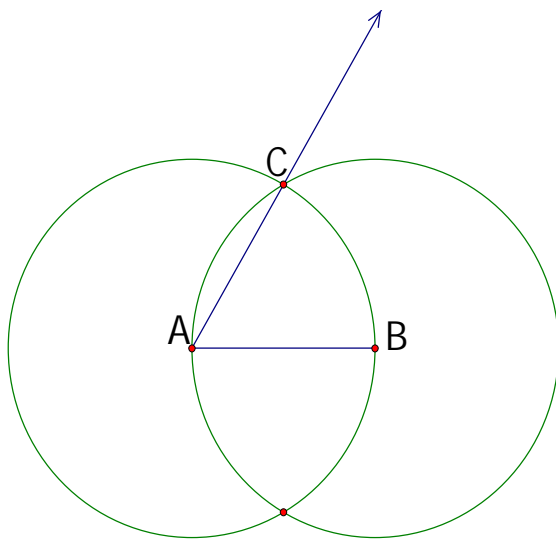
1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. สร้างเส้นตั้งฉากที่จุด A โดยเลือกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB เลือกเมนูสร้าง คำสั่งเส้นตั้งฉาก
3. สร้างจุดอิสระบนเส้นตั้งฉากที่ได้ตั้งชื่อ จุด C
4. เลือกที่จุด B, A และ C ตามลำดับ เลือกเมนูสร้าง คำสั่งเส้นแบ่งครึ่งมุม





การสร้างมุมที่มีขนาด 60°

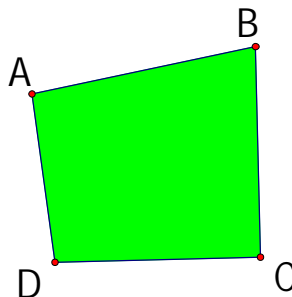
1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. สร้างวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A โดยเลือกที่จุด A และจุด B เลือกเมนูสร้าง คำสั่งสร้างวงกลมจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น
3. สร้างวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด B โดยเลือกที่จุด B และจุด A เลือกเมนูสร้าง คำสั่งสร้างวงกลมจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น
4. หาจุดตัดของวงกลมทั้งสองวง ตั้งชื่อจุดตัดเป็นจุด C
5. เลือกที่จุด A และ C สร้างรังสี จะได้มุม BAC ที่มีขนาดเท่ากับ 60°

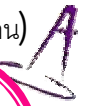


การระบายสี

การระบายสีบริเวณภายในรูปต่างๆ ที่เกิดจากการสร้างสามารถทำได้ดังนี้

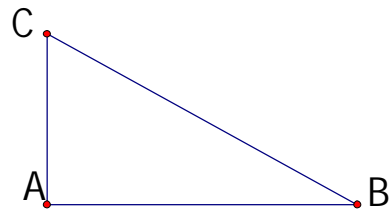
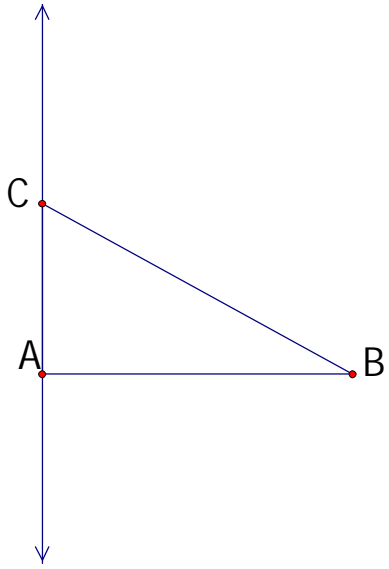
1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ขึ้นมา 1 รูป ตั้งชื่อเป็นสี่เหลี่ยม $ABCD$
2. เลือกที่จุด A, B, C และ D (โดยเรียงไปตามแนวเส้น) เลือกที่เมนูสร้าง คำสั่งภายในรูปสี่เหลี่ยม จะได้สีบริเวณภายในรูป





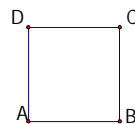
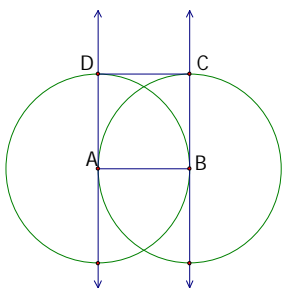
การสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

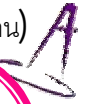
1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. เลือกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB ใช้คำสั่งสร้างเส้นตั้งฉาก จากเมนูสร้าง
3. สร้างจุดอิสระบนเส้นตั้งฉากที่ได้ ตั้งชื่อเป็นจุด C
4. เชื่อมส่วนของเส้นตรง AC และ ส่วนของเส้นตรง BC



การสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. เลือกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB ใช้คำสั่งสร้างเส้นตั้งฉาก จากเมนูสร้าง
3. ที่จุด B สร้างเส้นตั้งฉาก เช่นเดียวกับข้อ 2
4. เลือกที่จุด A และ B สร้างวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและจุดอื่น และที่จุด B สร้างวงกลมที่จุดนี้ ในวิธีการเดียวกัน
5. หาจุดตัดของเส้นตั้งฉากและวงกลมทั้งสอง ตั้งชื่อ จุด C และ D
6. เชื่อม AC , CD , และ DB ด้วยส่วนของเส้นตรง
7. ซ่อนส่วนที่ไม่ต้องการแสดง

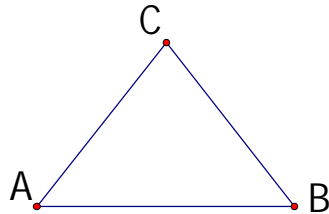




การวัดขนาดของมุม

การวัดขนาดของมุมต่างๆ สามารถทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. สร้างรูปสามเหลี่ยมใดๆ ขึ้นมาหนึ่งรูป ชื่อสามเหลี่ยม ABC
2. ต้องการวัดมุม B เลือกที่จุด A, B และ C ตามลำดับ เลือกที่เมนูวัด คำสั่งมุม ต้องการวัดมุม A เลือกที่จุด B, A และ C ตามลำดับ เลือกที่เมนูวัด คำสั่งมุม ต้องการวัดมุม C เลือกที่จุด A, C และ B ตามลำดับ เลือกที่เมนูวัด คำสั่งมุม
3. จะได้ขนาดของมุมที่ต้องการวัดดังภาพ



$$m\angle BAC = 50.84^\circ$$

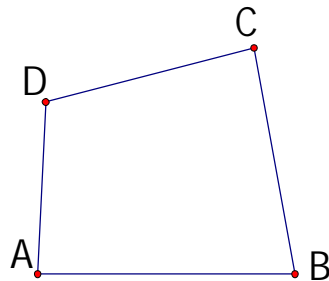
$$m\angle ABC = 51.20^\circ$$

$$m\angle ACB = 77.96^\circ$$

การวัดความยาวของด้าน

การวัดความยาวของด้านของรูปเรขาคณิตต่างๆ สามารถทำได้โดยใช้เมนูวัด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมใดๆ ขึ้นมา 1 รูป ตั้งชื่อเป็น สี่เหลี่ยม ABCD
2. วัดความยาวด้าน AB เลือกที่ด้าน AB ที่เมนูวัด คำสั่งความยาว วัดเช่นเดียวกันนี้กับด้าน BC, AD และ CD จะได้ค่าที่ได้จากการวัดดังภาพตัวอย่าง



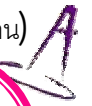
$$m \overline{AD} = 2.70 \text{ ซม.}$$

$$m \overline{AB} = 4.15 \text{ ซม.}$$

$$m \overline{CB} = 3.61 \text{ ซม.}$$

$$m \overline{DC} = 3.47 \text{ ซม.}$$

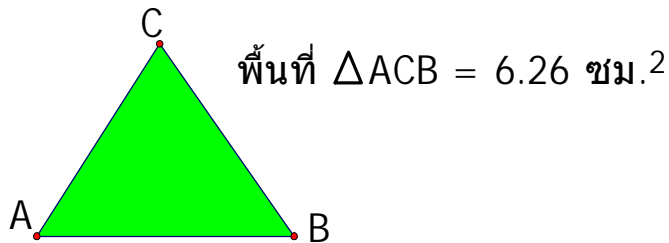




การวัดพื้นที่

การวัดพื้นที่โดยการใช้คำสั่งจากเมนูวัดนั้น สามารถหาได้เมื่อรูปที่ต้องการหาพื้นที่นั้นต้องมีการระบายสีบริเวณภายในรูปนั้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

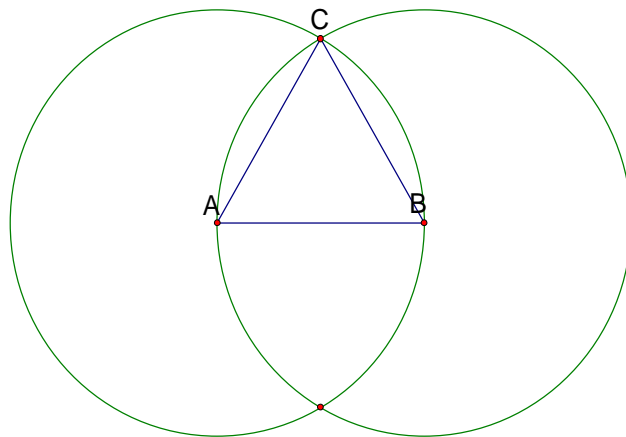
1. สร้างรูปสามเหลี่ยมใดๆ 1 รูป ชื่อสามเหลี่ยม ABC
2. ระบายสีบริเวณภายในรูปโดยเลือกที่จุด A, B และ C เลือกเมนูสร้าง คำสั่งภายในรูปสามเหลี่ยม
3. เลือกเฉพาะพื้นที่ที่ระบายสีภายในรูป เลือกที่เมนูวัด คำสั่งพื้นที่ ดังภาพ



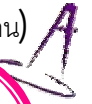
การสร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวของด้านเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนดให้

มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. เลือกที่จุด A เลือกที่เส้น AB เลือกที่เมนูสร้าง → วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
3. จากนั้นเลือกที่จุด B และเลือกที่เส้น AB ไปที่เมนูสร้าง → วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
4. จะได้วงกลม 2 วง ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A และจุด B
5. หาจุดตัดของวงกลม 2 วง โดยเลือกวงกลมทั้ง 2 วง จากนั้นเลือกที่เมนูสร้าง → จุดตัด ตั้งชื่อจุดตัดเป็นจุด C
6. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมไปยังจุดตัด จะได้ดังภาพ
7. เลือกที่วงกลมและจุดเพื่อทำการซ่อน โดยเลือกที่เมนูแสดงผล → ซ่อนวงกลม



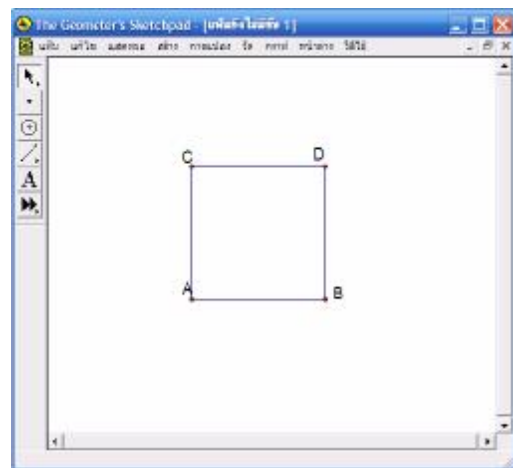
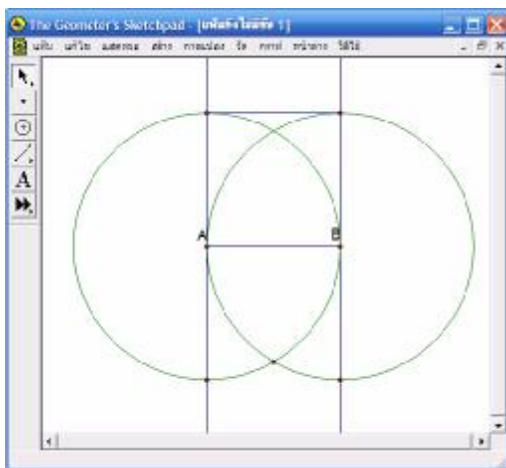
ข้อแนะนำ : ทุกๆ ครั้ง ของการเลือกเครื่องมือต่อไป ควรตรวจสอบว่ายังมีการเลือกอ็อบเจกต์ใดๆ ค้างอยู่หรือไม่ ก่อนเลือกเครื่องมือทุกครั้ง โดยเลือกไปที่เครื่องมือลูกศร หรือกดปุ่ม ESC ที่คีย์บอร์ด

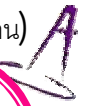


การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

มีขั้นตอนการสร้างวิธีหนึ่งดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. สร้างเส้นตั้งฉากที่จุด A และ B โดยการเลือกจุด A และ จุด B และส่วนของเส้นตรง AB เลือกที่เมนูสร้าง—> เส้นตั้งฉาก
3. เลือกจุด A เลือกส่วนของเส้นตรง AB เลือกที่เมนูสร้าง —> วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี จากนั้นเลือกจุด B และเลือกที่ส่วนของเส้นตรง AB ที่เมนูสร้าง —> วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี จะได้วงกลม 2 วง ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A และจุด B
4. หาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตั้งฉากที่สร้างขึ้น โดยการเลือกที่เส้นตั้งฉากและเส้นรอบวง เลือกเมนูสร้าง—> จุดตัด
5. เชื่อมแต่ละจุดด้วยส่วนของเส้นตรง จากนั้นทำการซ่อนอ็อบเจกต์ที่ไม่ต้องการแสดงให้เห็นโดยเลือกที่เมนูแสดงผล —> ซ่อนอ็อบเจกต์



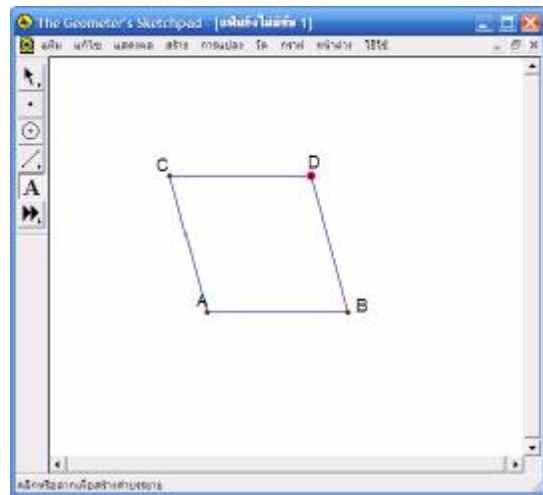
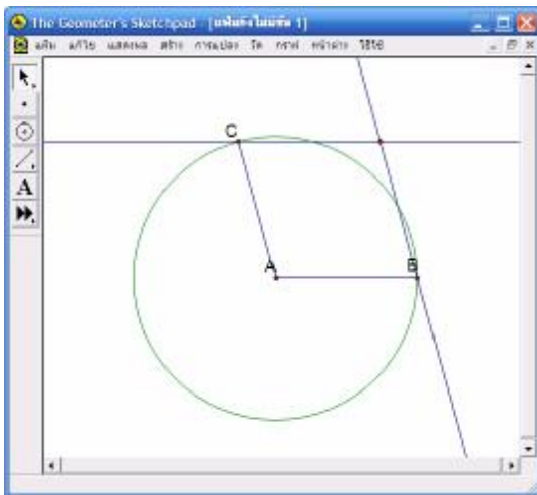


การสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

มีขั้นตอนการสร้างวิธีหนึ่งดังนี้

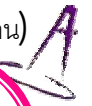
1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. เลือกจุด A เลือกที่ส่วนของเส้นตรง AB เลือกที่เมนูสร้าง \rightarrow วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
3. เลือกที่เส้นรอบวง เลือกที่เมนูสร้าง \rightarrow จุดบนวงกลม จะได้จุดใดๆ ที่สามารถวิ่งบนเส้นรอบวงได้ ตั้งชื่อเป็นจุด C เพื่อกำหนดให้ส่วนของเส้นตรง AC เป็นด้านๆ หนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม
4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A และจุด C
5. สร้างเส้นขนานผ่านจุด C และให้ขนานกับส่วนของเส้นตรง AB โดย เลือกจุด C และส่วนของเส้นตรง AB เลือกที่เมนูสร้าง \rightarrow เส้นขนาน จะได้เส้นตรงที่ขนานกับส่วนของเส้นตรง AB
6. สร้างเส้นขนานกับส่วนของเส้นตรง AC ผ่านจุด B โดยเลือกจุด B และส่วนของเส้นตรง AC เลือกที่เมนูสร้าง \rightarrow เส้นขนาน หากจุดตัดของเส้นขนานที่เกิดขึ้น ตั้งชื่อเป็นจุด D
7. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งหมด จากนั้นทำการซ่อนอ็อบเจกต์ที่ไม่ต้องการแสดง จะได้รูปสี่เหลี่ยม

ขนมเปียกปูนที่มีความยาวของด้านที่ยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรงที่กำหนด



ข้อแนะนำ : ทุกๆ ครั้ง ของการเลือกเครื่องมือต่อไป ควรตรวจสอบว่ายังมีการเลือกอ็อบเจกต์ใดๆ ค้างอยู่หรือไม่ ก่อนเลือกเครื่องมือทุกครั้ง โดยเลือกไปที่เครื่องมือลูกศร หรือกดปุ่ม ESC ที่คีย์บอร์ด





การสร้างตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้าง ความยาว พื้นที่ เส้นรอบรูป ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

GSP มีสมบัติที่เอื้อให้ครูใช้สร้างตารางเพื่อช่วยในการสอนในเนื้อหาต่างๆ ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

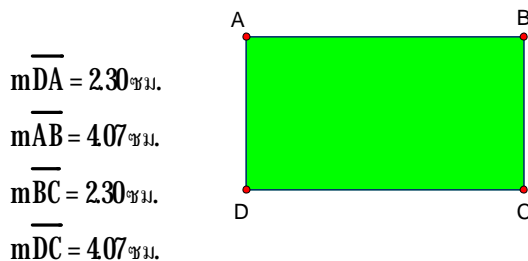
1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ดังภาพ
2. ระบายสีบริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
3. วัดความยาวของแต่ละด้าน จากเมนูวัด
4. วัดพื้นที่โดยเลือกที่พื้นที่บริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก จากเมนูวัด



5. วัดความยาวรอบรูปโดยเลือกที่พื้นที่บริเวณภายใน เลือกเมนูวัด คำสั่งความยาวรอบรูป จะได้ดังภาพ

$$\text{พื้นที่ } ABCD = 9.38 \text{ ซม.}^2$$

$$\text{เส้นรอบรูป } ABCD = 12.75 \text{ ซม.}$$



6. การสร้างตารางแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความกว้าง ความยาว พื้นที่ เส้นรอบรูปนั้น เพื่อให้หัวตารางมีความหมาย เราอาจเปลี่ยนชื่อระหว่างหัวตารางได้ดังนี้

- เปลี่ยนป้ายชื่อของความยาวด้าน AB เป็น ความยาว โดยเลือก $m AB$ ที่วัดได้แล้วคลิกขวา ที่สมบัติตั้งชื่อว่าความยาว
- ดำเนินการเช่นเดียวกันกับความกว้าง
- เลือกค่าที่วัดไว้ตามลำดับดังนี้ เลือก ความกว้าง , ความยาว , พื้นที่ และเส้นรอบรูป เลือกเมนูกราฟ คำสั่งสร้างตาราง จะปรากฏดังภาพ

ความกว้าง	ความยาว	พื้นที่ ABCD	เส้นรอบรูป ABCD
2.30 ซม.	4.07 ซม.	9.38 ซม. ²	12.75 ซม.

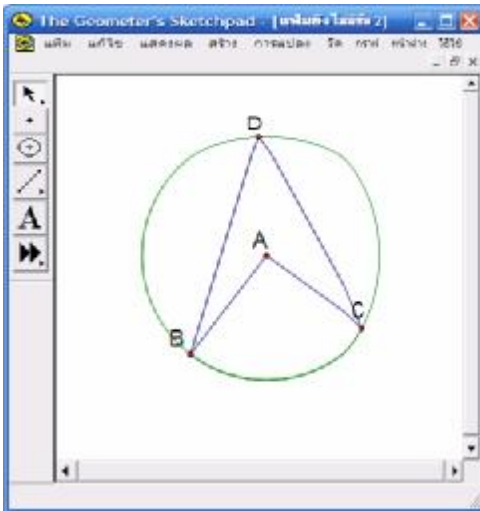


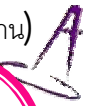
การสร้าง ส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางและ มุมที่เส้นรอบวง

มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. เลือกเครื่องมือสร้างวงกลม สร้างวงกลมที่มีขนาดพอสมควร ซึ่งจะประกอบด้วยจุดศูนย์กลางวงกลม และจุดบนเส้นรอบวง (จุดบนเส้นรอบวงมีไว้เพื่อกำหนดขนาดของวงกลม)
2. ทำการช้อนจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงโดยเลือกจุดนั้น เลือกเมนูแสดงผล → ช้อนจุด ตั้งชื่อจุดศูนย์กลาง เป็นจุด A
3. สร้างจุดใดๆ บนวงกลม 2 จุด โดยเลือกที่เส้นวงกลม เลือกเมนูสร้าง → จุดบนวงกลม ตั้งชื่อเป็นจุด B และจุด C
4. สร้างส่วนโค้งน้อย BC โดยการเลือกที่จุด A จุด B และ C ตามลำดับ (เลือกจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงในลักษณะทวนเข็มนาฬิกา)
5. เลือกที่เมนู สร้าง → ส่วนโค้งบนวงกลม จะได้ส่วนโค้งน้อย BC
6. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A, B และจุด A, C จะได้เป็นรูปมุมที่จุดศูนย์กลาง
7. สร้างจุดบนเส้นรอบวงอีก 1 จุด ตั้งชื่อเป็นจุด D ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด B,D และ C,D จะได้

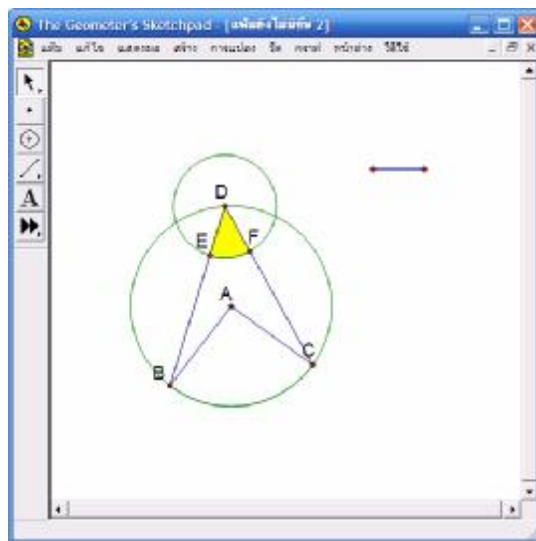
ดังภาพ



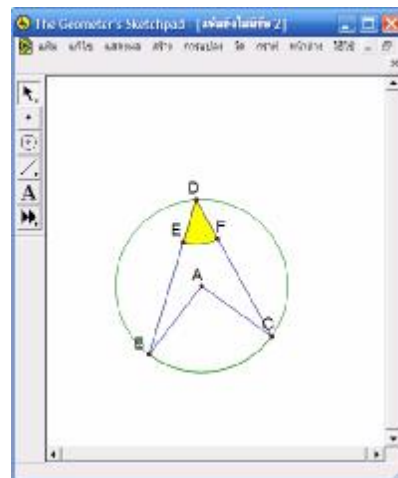


8. การสร้างส่วนที่แสดงมุม D ทำได้ดังนี้

- กำหนดส่วนของเส้นตรงความยาวพอสมควรเพื่อเป็นรัศมี
- สร้างวงกลมโดยมีจุดศูนย์กลางที่จุด D โดย และส่วนของเส้นตรงที่สร้างขึ้นเป็นรัศมี
- เลือกที่เมนูสร้าง—> วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
- หาจุดตัดของเส้นรอบวงกับแขนของมุม ตั้งชื่อเป็นจุด E และ F
- สร้างส่วนโค้งของวงกลม EF โดยเลือกที่จุด D, E และ F (ลักษณะทวนเข็มนาฬิกา)
- เลือกที่เมนูสร้าง- -> ส่วนโค้งบนวงกลม จะได้ส่วนโค้ง EF ซ่อนวงกลม
- ระบายสีเซกเตอร์โดยการเลือกที่ส่วนโค้ง EF เลือกที่เมนูสร้าง —> ภายในส่วนโค้ง —> อาร์กเซกเตอร์



9. คลิกอ็อบเจกต์ที่ต้องการซ่อนทั้งหมด จะได้ดังภาพ



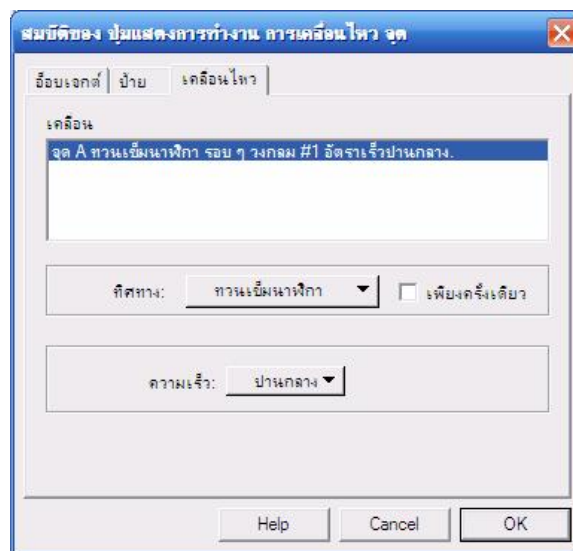
การเคลื่อนไหวของจุดและเส้น

การใช้คำสั่งการเคลื่อนไหว สามารถสร้างโดยใช้ปุ่มแสดงการทำงาน เลือกการเคลื่อนไหว จากเมนู แก้ไข มีวิธีการดังนี้

ตัวอย่าง ต้องการกำหนดให้รัศมีของวงกลมเคลื่อนไหว

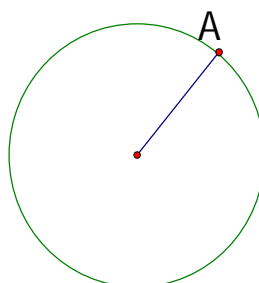
1. สร้างวงกลมด้วยเครื่องมือวาดวงกลม
 2. ช้อนจุดที่อยู่บนเส้นวงกลม
 3. เลือกที่เส้นวงกลม สร้างจุดบนวงกลมจากเมนู สร้าง ตั้งชื่อ จุด A
 4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A และจุดศูนย์กลางของวงกลม
- การสร้างปุ่มควบคุมการเคลื่อนไหว ทำได้ดังนี้
5. เลือกที่จุด A ไปที่เมนูแก้ไข คำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน เลือกการเคลื่อนไหวจะปรากฏหน้าต่างดัง

ภาพ



6. จะได้ปุ่มแสดงการเคลื่อนไหว เมื่อคลิกที่ปุ่มนี้จุด A ก็ จะเคลื่อนไหวรอบเส้นวงกลมในทิศทางตาม กำหนด

การเคลื่อนไหว จุด



การแปลงทางเรขาคณิต

การสะท้อน (Reflection)

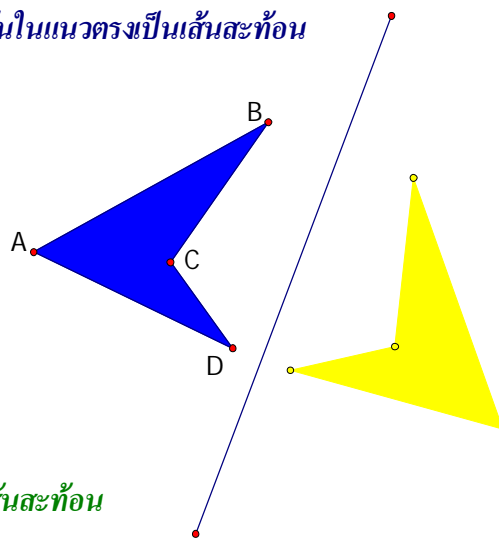
1. ในการสะท้อนต้องมี เส้นสะท้อนซึ่งเป็นเส้นแทนกระจกสร้างเส้นในแนวตรงเป็นเส้นสะท้อน กำหนดให้เส้นนี้เป็นเส้นสะท้อน โดยคลิกเลือกเส้นนี้

- ----> การแปลง ---> ระบุเส้นสะท้อน
หรือ ดับเบิลคลิกที่เส้นนั้น

2. สร้างรูปเรขาคณิตใดๆ คลิกเลือกรูปนั้นแล้ว

----> การแปลง --> สะท้อน

3. ตรวจสอบโดยการลากรูปต้นแบบ ส่วนต่างๆของรูป หรือที่เส้นสะท้อน



การหมุน (Rotation)

1. จะทำการหมุนได้ต้องมีจุดศูนย์กลางของการหมุน ก่อน

- สร้างจุดใดๆ เตรียมไว้ 1 จุด

2. กำหนดให้จุดนี้เป็นจุดศูนย์กลางของการหมุน โดย

- เลือกจุดนั้น ----> การแปลง --> ระบุจุดศูนย์กลาง

- หรือ ดับเบิลคลิกที่จุดนั้น

3. สร้างรูปใดๆ กำหนดการหมุนรูปนั้นแบบกำหนดมุมแน่นอน ทำดังนี้

- เลือกรูปนั้น --> การแปลง --> หมุน เติมขนาดของมุมในกล่อง เช่น 90°

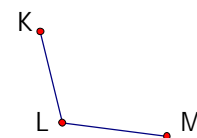
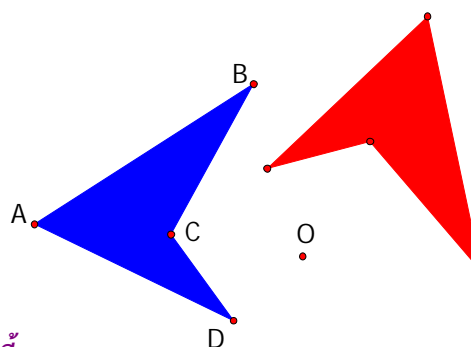
4. ตรวจสอบโดยการเคลื่อนรูป เคลื่อนจุด หรือเคลื่อนตรงกลาง

5. กำหนดการหมุนแบบอื่นทำได้โดย

สร้างมุมอิสระขึ้นมา 1 มุม เลือกจุดบนมุมนั้น 3 จุดตามลำดับ

----> การแปลง --> ระบุมุม เลือกรูปต้นแบบ --> การแปลง --> หมุน

6. พิจารณาการเปลี่ยนแปลงที่เกิดเมื่อปรับขนาดของมุมที่กำหนด



$$m\angle KLM = 111^\circ$$



การแปลงทางเรขาคณิต

การเลื่อนขนาน (Translation)

1. สร้างและเลือกรูปเรขาคณิตที่ต้องการจะเลื่อนแบบตายตัว

--> การแปลง --> เลื่อนขนาน แล้วเลือกแบบของการเลื่อนแบบเชิงขั้ว หรือแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก

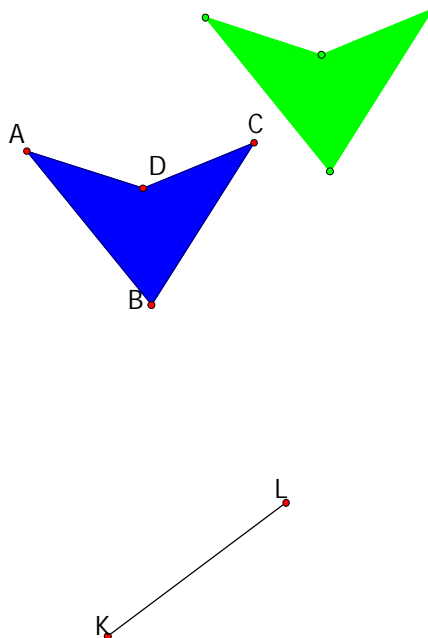
2. ตรวจสอบโดยการลากรูปต้นแบบ หรือ ส่วนต่างๆของรูป

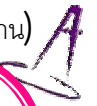
3. กำหนดการเลื่อนแบบอื่น ทำได้ดังนี้ สร้างจุด 2 จุดใดๆ เพื่อกำหนดเป็นเวกเตอร์ จากจุดแรกไปยังจุดที่สอง คลิกเลือกจุดนี้ตามลำดับ แล้ว

--> การแปลง --> ระบุเวกเตอร์ คลิกเลือกรูป

--> การแปลง --> เลื่อนขนาน

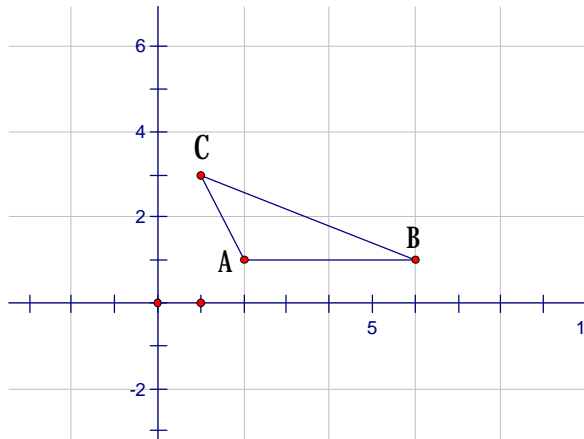
4. ตรวจสอบโดยการลากรูปต้นแบบ ส่วนต่างๆของรูป หรือจุดที่แสดงเวกเตอร์





กิจกรรม 1 การสะท้อน กับแกน X

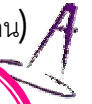
- เลือกใช้แกน X เป็นเส้นสะท้อน ให้หารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพสะท้อนจากรูปสามเหลี่ยม ABC



- ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อจุดที่สมนัยกัน ส่วนของเส้นตรงดังกล่าวสัมพันธ์กับเส้นสะท้อนอย่างไร
- เมื่อ (x', y') เป็นพิกัดของจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x, y)

รูปที่	พิกัดของรูปต้นแบบ			พิกัดของภาพที่เกิดจากการสะท้อนด้วยแกน X		
	จุด	x	y	จุด	x'	y'
1	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
2	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
3	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		





4 จากข้อมูลที่ได้ในตาราง ข้อ 3 ให้เติมจำนวนเพื่อแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของพิกัดใหม่กับพิกัดเดิม

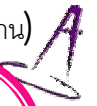
$$x' = \dots x \quad \text{หรือ} \quad * \quad x' = \dots x + \dots y$$

$$y' = \dots y \quad \text{หรือ} \quad * \quad y' = \dots x + \dots y$$

5.* ถ้าเขียนพิกัดของจุด (x,y) ในรูปของเมทริกซ์ มีติ 2×1 จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ พิกัดของจุดที่เกิด

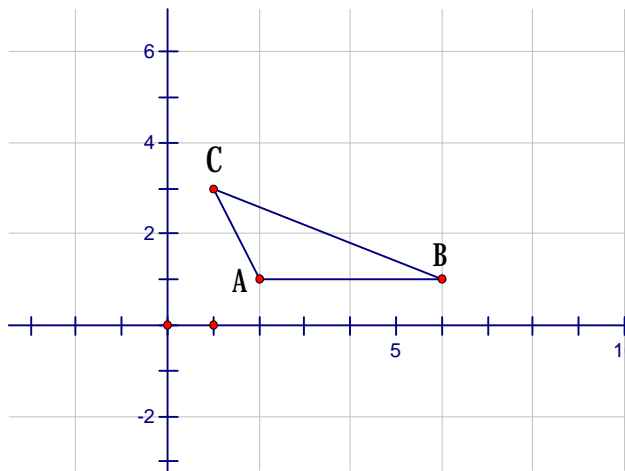
จากการสะท้อนนั้น จะได้จากการคูณ เมทริกซ์ ใดกับเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$





กิจกรรม 2 การสะท้อน กับแกน Y

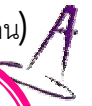
- เลือกใช้แกน Y เป็นเส้นสะท้อน ให้หารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพสะท้อนจากรูปสามเหลี่ยม ABC



- ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อกจุดที่สมนัยกัน ส่วนของเส้นตรงดังกล่าวสัมพันธ์กับเส้นสะท้อนอย่างไร
- เมื่อ (x', y') เป็นพิกัดของจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x, y)

รูปที่	พิกัดของรูปต้นแบบ			พิกัดของภาพที่เกิดจากการสะท้อนด้วยแกน X		
	จุด	x	y	จุด	x'	y'
1	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
2	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
3	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		





4 จากข้อมูลที่ได้ในตาราง ข้อ 3 ให้เติมจำนวนเพื่อแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของพิกัดใหม่กับพิกัดเดิม

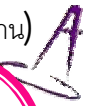
$$x' = \dots x \quad \text{หรือ} \quad * \quad x' = \dots x + \dots y$$

$$y' = \dots y \quad \text{หรือ} \quad * \quad y' = \dots x + \dots y$$

5.* ถ้าเขียนพิกัดของจุด (x,y) ในรูปของเมทริกซ์ มิติ 2×1 จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ พิกัดของจุดที่เกิด

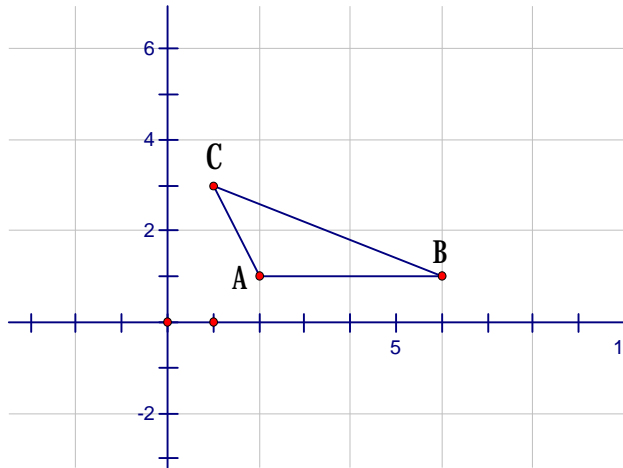
จากการสะท้อนนั้น จะได้จากการคูณ เมทริกซ์ ใดกับ เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$





กิจกรรม 3 การสะท้อน ด้วยเส้นตรง $y = x$

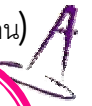
1. เลือกใช้เส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นสะท้อน ให้หารูปสามเหลี่ยม $A'B'C'$ ซึ่งเป็นภาพสะท้อนจากรูปสามเหลี่ยม ABC



2. ถ้าลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อกจุดที่สมนัยกัน ส่วนของเส้นตรงดังกล่าวสัมพันธ์กับเส้นสะท้อนอย่างไร
3. เมื่อ (x', y') เป็นพิกัดของจุดที่เกิดจากการสะท้อนจุด (x, y)

รูปที่	พิกัดของรูปต้นแบบ			พิกัดของภาพที่เกิดจากการสะท้อนด้วยแกน x		
	จุด	x	y	จุด	x'	y'
1	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
2	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		
3	A			A'		
	B			B'		
	C			C'		





4 จากข้อมูลที่ได้ในตาราง ข้อ 3 ให้เติมจำนวนเพื่อแสดงความสัมพันธ์ทางพีชคณิตของพิกัดใหม่กับพิกัดเดิม

$$x' = \dots x \quad \text{หรือ} \quad * \quad x' = \dots x + \dots y$$

$$y' = \dots y \quad \text{หรือ} \quad * \quad y' = \dots x + \dots y$$

5.* ถ้าเขียนพิกัดของจุด (x,y) ในรูปของเมทริกซ์ มิติ 2×1 จะได้ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ พิกัดของจุดที่เกิด

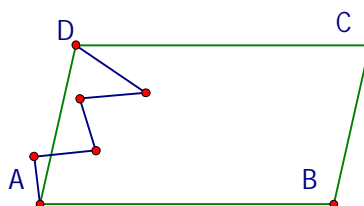
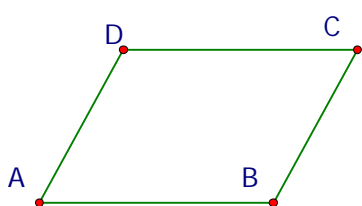
จากการสะท้อนนั้น จะได้จากการคูณ เมทริกซ์ ใดกับเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$



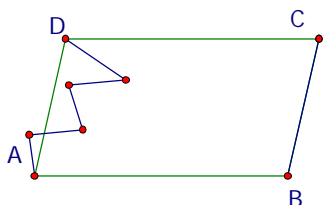


ทฤษฎีบทเลขน

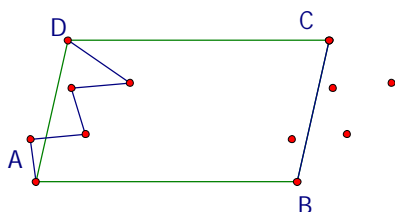
1. ใช้เครื่องมือเส้น สร้างด้าน AB และ BC ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$
2. ระบุ BC เป็นเวกเตอร์ในเมนูการแปลง
3. เลื่อนขนานจุด A ด้วย เวกเตอร์ BC
4. ในเมนูการแปลงใช้เครื่องมือเส้นเขียนด้านที่เหลือของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
5. ใช้เครื่องมือเส้นสร้างเส้น เชื่อมอื่นๆ ระหว่างจุด A และจุด D



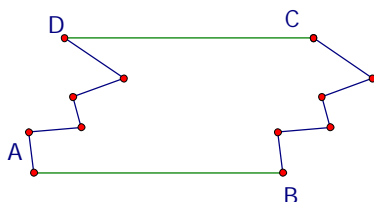
6. ระบุ AB เป็นเวกเตอร์ เลือกทุกจุดที่เชื่อมระหว่างจุด A และจุด D
แล้วสั่งเลื่อนขนาน



7. เชื่อมต่อจุดทุกจุดจาก B ไป C แล้วซ่อนด้าน AD และด้าน BC



8. ใช้การเลื่อนขนานทำทฤษฎีบทเลขนรูปที่ได้ตามชอบโดยกำหนดเวกเตอร์ที่จะให้เลื่อนไป



การย่อ / ขยาย

ในเรื่องการแปลงทางเรขาคณิตมีเรื่องหนึ่งที่ครูสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการสร้างสื่อการสอน เพื่อสร้างความสนใจในการเรียนคณิตศาสตร์ คือ การย่อขยาย ใน GSP มีคำสั่งนี้อยู่ในเมนูการแปลง

การย่อขยายสามารถทำได้ 3 ลักษณะ คือ

1. ย่อ / ขยาย ใน 1 มิติ เช่น ย่อ / ขยายส่วนของเส้นตรง
2. ย่อ / ขยาย ใน 2 มิติ เช่น ย่อ / ขยายพื้นที่
3. ย่อ / ขยาย ใน 3 มิติ เช่น ย่อ / ขยายรูปที่มีปริมาตร

ในที่นี้เราจะศึกษาเฉพาะการย่อ / ขยายรูปใน 1 มิติและ 2 มิติ

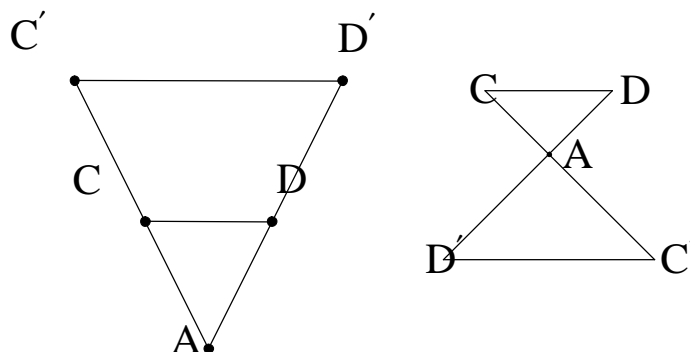
แบบที่ 1 ย่อขยายใน 1 มิติ

การย่อ / ขยายจะต้องมีองค์ประกอบต่อไปนี้

1. รูปเรขาคณิตหรือวัตถุที่ต้องการย่อ / ขยาย
2. จุดศูนย์กลาง (หรือจุดเริ่มต้น)
3. อัตราส่วนของการย่อ / ขยาย
4. ทิศทางของการย่อขยาย

ตัวอย่างการสร้างต่อไปนี้

1. กำหนดจุด A ใด ๆ แล้วระบุเป็นจุดศูนย์กลาง
2. สร้างส่วนของเส้นตรง CD แล้วเลือก ส่วนของเส้นตรง CD (ส่วนของเส้นตรงที่ต้องการย่อ / ขยาย)
3. ที่เมนูการแปลงเลือกคำสั่งย่อ ขยาย จะได้กล่องโต้ตอบ ทดลองเติมจำนวนลงในอัตราส่วนที่ตัวเลขและตัวส่วน ทั้งจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบ พิจารณาเส้นจาง ๆ ที่เกิดว่าสัมพันธ์กับจำนวนที่ระบุลงในกล่องโต้ตอบอย่างไร
4. ลองขยับจุดศูนย์กลาง หรือส่วนของเส้นตรงต้นแบบ (CD) พิจารณาทิศทางของภาพที่เกิดจากการย่อขยาย
5. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดปลายของรูปต้นแบบและภาพที่เกิด พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น เช่น





จะเห็นว่า สามเหลี่ยม ACD และ $AD'C'$ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายไม่ว่าจะโยกจุดไปยังทิศทางใด

แบบที่ 2 การย่อ / ขยาย ใน 2 มิติ

องค์ประกอบของการย่อ / ขยายใน 2 มิติทำนองเดียวกันกับ 1 มิติ ตัวอย่างการสร้างเช่น

1. สร้างรูปหลายเหลี่ยมใด ๆ 1 รูป
2. สร้างจุด A ใด ๆ ระบุให้เป็นจุดศูนย์กลาง
3. ที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งย่อ / ขยาย กำหนดอัตราส่วนตามใจชอบ เช่น
4. เคลื่อนจุดศูนย์กลางพิจารณาภาพที่เคลื่อนไหว
5. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุดสมนัยของรูปต้นแบบและภาพที่เกิดจากการย่อ / ขยาย จะเห็นว่า เมื่อเทียบกับจุดศูนย์กลางจะได้รูปสามเหลี่ยมคล้ายเสมอ

การย่อ / ขยายที่มีการเปลี่ยนขนาดอย่างต่อเนื่องจะต้องใช้อัตราส่วนที่มีการเปลี่ยนค่าอย่างต่อเนื่องเป็นอัตราส่วนที่ระบุ

อัตราส่วนของการย่อ / ขยายมี 2 แบบคือ

1. อัตราส่วนคงที่ เป็นอัตราส่วนที่จะต้องกำหนดตัวเลขแน่นอน
2. อัตราส่วนที่ระบุ เป็นอัตราส่วนที่เราสามารถเปลี่ยนแปลงได้

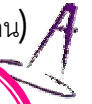
การเคลื่อนจุดใน GSP จุดสามารถสั่งให้เคลื่อนได้ 2 แบบ ดังนี้

- การเคลื่อนที่จุด เป็นการสั่งให้จุดเคลื่อนที่จากจุดต้นทางไปยังจุดปลายทาง ดังนั้น การสั่งให้จุดเคลื่อนที่จะต้องคลิกจุดต้นทางและจุดปลายทางตามลำดับ

- การเคลื่อนไหวจุด เป็นการสั่งให้จุดเปลี่ยนตำแหน่งโดยไม่ต้องมีจุดหมายปลายทาง การสั่งให้จุดเคลื่อนไหวทำได้ 2 แบบคือ

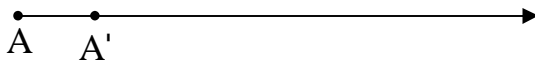
1. การสั่งเคลื่อนไหวจุดที่วาง ณ ตำแหน่งใด ๆ บนระนาบ จุดประเภทนี้จะเคลื่อนไหวแบบสุ่มมีทิศทางไม่แน่นอน
2. การสั่งเคลื่อนไหวจุดให้ไปในทิศทางที่ต้องการ จะต้องมีการสร้างเส้นทางการเคลื่อนของจุดก่อนแล้วนำจุดไปวางบนเส้นทางที่สร้างซึ่งอาจเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง ส่วนโค้ง จากนั้นจึงใช้คำสั่งการเคลื่อนไหวจุดแล้วกำหนดทิศทางและความเร็วของการเคลื่อนไหว



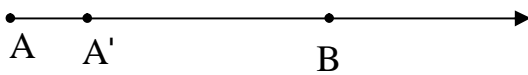


ตัวอย่างการสร้างสี่เหลี่ยม / ขยายอย่างต่อเนื่องโดยใช้อัตราส่วนที่ระบุ

1. กำหนดจุด 1 จุด
2. เลื่อนขนานจุดนั้นไปในแนวนอน 1 เซนติเมตร
3. เลือกจุดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ สร้างรังสี



กำหนดจุดใด ๆ บนรังสี



5. เลือกจุดที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ ที่เมนูวัด เลือกคำสั่งอัตราส่วน จะได้อัตราส่วน

$\frac{AB}{AA'} = 5.1$ จะสังเกตเห็นว่า ระยะระหว่างจุดที่ 1 และ 2 จะเป็นตัวส่วนของอัตราส่วน
ระยะระหว่างจุดที่ 1 และ 3 จะเป็นตัวเศษของอัตราส่วน

6. เมื่อได้อัตราส่วน นำอัตราส่วนนั้นมาใช้ย่อ/ขยายโดยวาดรูปใด ๆ โดยดำเนินการต่อไปนี้
 - กำหนดจุดศูนย์กลาง แล้วระบุเป็นจุดศูนย์กลางที่เมนูการแปลง
 - เลือกค่าอัตราส่วน แล้วไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งระบุตัวประกอบพารามิเตอร์ เพื่อกำหนดเป็นอัตราส่วนในการย่อ/ขยาย
 - เลือกรูปที่เราต้องการย่อ/ขยาย ที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งย่อ/ขยาย
7. ทดลองปรับ / เคลื่อนจุดที่ 3 บนรังสี
ทดลองปรับเคลื่อนจุดศูนย์กลางของการย่อขยาย
8. เพื่อให้การแสดงผลน่าพอใจ เราอาจซ่อนรูปต้นแบบที่เมนูแสดงผล โดยเลือกคำสั่งซ่อน



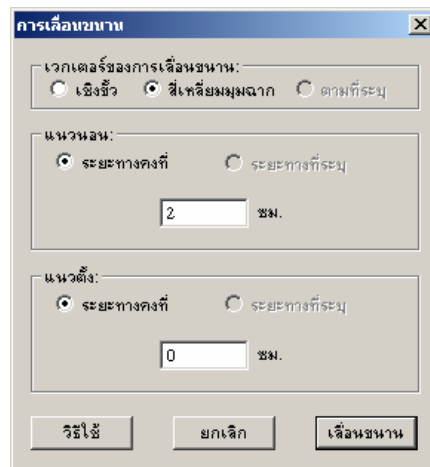
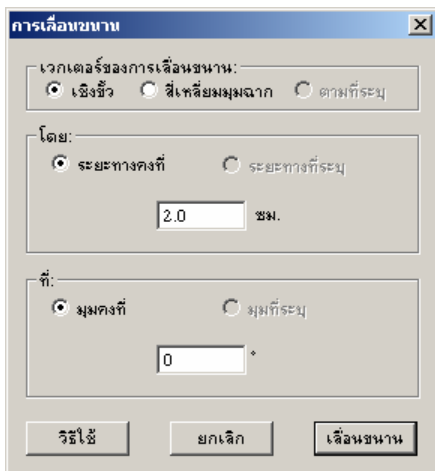
การสร้างรูปเรขาคณิตที่มีขนาดคงที่

การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้คำสั่งการแปลงจะทำให้ได้จุด ซึ่งผูกพันกับจุดเดิม รูปที่เกิดขึ้นจึงมีขนาดและรูปร่างคงที่

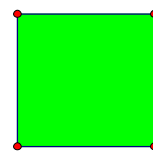
การสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวด้านละ 2 ซม.

สามารถสร้างได้หลายวิธีตัวอย่างเช่น

1. สร้างจุดอิสระ 1 จุด เลื่อนขนานจุดนี้แบบเชิงขั้ว 0 องศา ขนาด 2 ซม. หรือ แบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ในแนวนอน 2 ซม. ในแนวตั้ง 0 ซม.



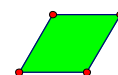
2. เลือกที่จุดทั้ง 2 จุด เลื่อนขนานทั้งสองจุดนี้แบบเชิงขั้ว 90 องศา ขนาด 2 ซม.
3. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่ที่ได้
4. ระบายสีบริเวณภายใน



การสร้างรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่มีความยาวด้านละ 1 ซม.

สามารถสร้างได้หลายวิธี ตัวอย่างเช่น

1. สร้างจุดอิสระขึ้นมา 1 จุด เลื่อนขนานจุดนี้ไปแบบเชิงขั้ว 0 องศา 1 ซม.
2. เลือกที่จุดทั้งสอง เลื่อนขนานแบบเชิงขั้วตามมุมองศาที่ต้องการ เช่น 60 องศา ระยะ 1 ซม.
3. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่ และระบายสีบริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยมที่ได้
4. ได้รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีความยาวด้านละ 1 ซม.





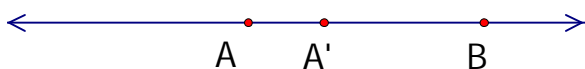
การสร้างตัวเลื่อน (Slider)

ในทางคณิตศาสตร์ เราเรียกสัญลักษณ์ที่กำหนดให้แทนค่าของจำนวนที่เปลี่ยนแปลงได้ ว่าตัวแปร ใน GSP เราสามารถกำหนดค่าของตัวแปรได้ในพารามิเตอร์ ซึ่งเป็นคำสั่งในเมนูกราฟ นอกจากนี้ยังสามารถใช้เครื่องมืออีกชนิดหนึ่งแทนค่าของความยาวที่เปลี่ยนแปลงได้อีก เรียกว่า ตัวเลื่อน ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการสร้างตัวเลื่อน 2 วิธี ที่ให้ผลแตกต่างกันขึ้นอยู่กับจุดประสงค์ของการนำไปใช้ต่อ

การสร้างตัวเลื่อน

1. เปิด แฟ้มใหม่จากคำสั่งแฟ้ม
2. กำหนดจุด A ที่ตำแหน่งใดๆ
3. ต้องการให้จุด A เลื่อนขนานไปทางขวามือ 1 ซม.
เลือก จุด A ..> คำสั่ง การแปลง
เลือก เลื่อนขนาน จะได้กล่องโต้ตอบดังรูป
สำหรับเวกเตอร์ของการเลื่อนขนานให้เป็น **เชิงซ้าย**
โดยให้ระยะคงที่เป็น 1 ซม. มุมคงที่เป็น 0 องศา
แล้วให้ เลื่อนขนาน
4. สร้างเส้นตรงผ่านจุด A และ A'
5. สร้างจุดใดๆบนเส้นตรง AA' หนึ่งจุด เช่นจุด B
6. เลือกจุดตามลำดับต่อไปนี้ A, A' และ B
จากเมนู วัด เลือก อัตราส่วน จะได้อัตราส่วน
ดังรูป

$$\frac{AB}{AA'} = 3.110$$



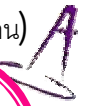
7. สร้าง ส่วนของเส้นตรง เชื่อมจุด AB
8. ซ่อนสิ่งที่ไม่ใช้ คือเส้นตรง AA' และจุด A'
9. ทดลองลากจุด B และสังเกตการเปลี่ยนแปลงที่อัตราส่วน

การเปลี่ยนป้ายชื่อ อัตราส่วน

คลิกขวาที่ป้ายอัตราส่วน จะได้กล่องโต้ตอบ เลือกสมบัติ พิมพ์ชื่อที่ต้องการ เช่น a แล้ว ตกลง
จะได้ป้ายใหม่ที่ต้องการ

$$a = 3.110$$



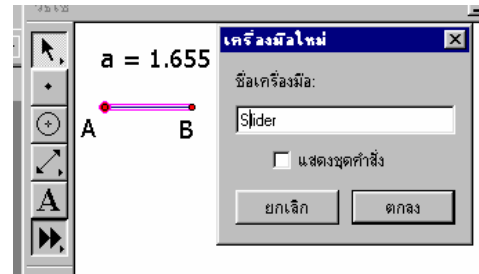


ตัวเลื่อน AB ที่ได้ เราสามารถนำไปใช้ในการกำหนดขนาดของรูปเรขาคณิตที่เราสร้างขึ้น และควบคุมการปรับขนาดของรูปจากภายนอก

นอกจากนี้เราสามารถเก็บตัวเลื่อนที่เราสร้างเอาไว้ในโอกาสต่อไปได้

การเก็บตัวเลื่อน (Slider) ไว้ใน เครื่องมือกำหนดเอง

- 1) เลือกจุด A และ \overline{AB}
- 2) เลือกเครื่องมือกำหนดเอง สร้างเครื่องมือใหม่
- 3) พิมพ์ชื่อที่ต้องการในกล่องโต้ตอบ ดังรูป
คลิกตกลง

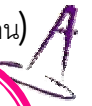


การสร้างตัวเลื่อน (Slider) แบบกำหนดขอบเขตได้

ในทางคณิตศาสตร์บางครั้ง เราต้องการเปลี่ยนแปลงค่าเฉพาะในขอบเขตที่จำกัดเพื่อให้นักเรียนเกิดความคิดรวบยอด วิธีสร้างตัวเลื่อนแบบกำหนดขอบเขตมีดังนี้

1. กำหนดจุดใด ๆ 1 จุด เช่น จุด A
2. เลื่อนขนานจุด A ในแนวนอนไปตามต้องการเช่น 3 เซนติเมตร ได้จุด A'
3. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อม 2 จุดนั้น
4. หาจุดกึ่งกลางส่วนของเส้นตรงนั้น (จุด C)
5. ที่เมนูการแปลง ระบุให้ จุด C เป็นจุดศูนย์กลาง
6. คลิกเลือกจุดปลาย A' ..>เมนูการแปลง คำสั่ง ย่อขยาย ได้กล่องโต้ตอบ กำหนด อัตราส่วน $1:10$ จะได้จุดใหม่ 1 จุด
7. สร้างจุดอิสระใหม่ 1 จุด บนส่วนของเส้นตรง
8. สร้างอัตราส่วนระหว่างระยะระหว่างจุดโดยคลิกเลือกตามลำดับดังนี้
 - จุดกึ่งกลาง
 - จุดเกิดจากการย่อขยาย
 - จุดอิสระ
 เมนูวัด คำสั่งอัตราส่วน
9. ได้อัตราส่วน คลิกค่าของอัตราส่วน เปลี่ยนป้ายชื่อเป็น a
10. ที่ส่วนของเส้นตรงซ่อนจุดตรึงทุกจุดยกเว้นจุดอิสระ ตั้งชื่อจุดนั้นว่า จุด a
11. จะได้ตัวเลื่อนแบบมีขอบเขต ตั้งแต่ -10 ถึง 10





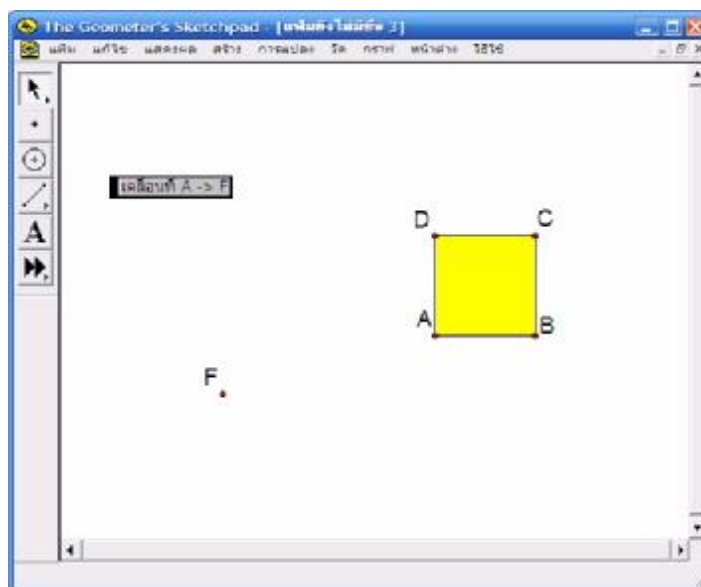
การเคลื่อนที่รูปเรขาคณิต

เราสามารถสร้างปุ่มควบคุมการเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิตได้ โดยอาศัยสมบัติของ GSP ที่ เมื่อมีจุด 2 จุด เช่น จุด A และจุด B เมื่อเลือกจุด A และจุด B ตามลำดับ ที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงานของระบบข้อมูลในกล่องโต้ตอบ แล้วจะได้ปุ่มควบคุม เมื่อกดปุ่มนี้จุด A จะเคลื่อนไปหาจุด B เสมอ ไม่ว่าจุด B จะเคลื่อนไปอยู่ในจุดใด

การเคลื่อนที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวของด้านคงที่แน่นอน เช่น 2 ซม.
2. เลือกเครื่องมือ จุด สร้างจุดใดๆ บนบริเวณแบบร่าง 1 จุด ตั้งชื่อเป็นจุด F
3. กำหนดให้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเคลื่อนที่ไปยังจุด F ทำได้ดังนี้
 - คลิกที่จุด A และคลิกที่จุด F ตามลำดับ (ระบุสิ่งที่จะทำให้เคลื่อนไปยังเป้าหมาย)
 - เลือกที่เมนู **แก้ไข** → **ปุ่มแสดงการทำงาน** → **การเคลื่อนที่...** กำหนดความเร็ว ซ้ำ ปานกลาง ตามต้องการ กดปุ่มตกลง
5. จะปรากฏปุ่มแสดงการเคลื่อนที่ A—F เมื่อกดที่ปุ่มนี้ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสก็จะเคลื่อนที่ไปยังจุด F



การสร้างเครื่องมือกำหนดเอง

นอกจากคำสั่งทางเรขาคณิตที่ซับซ้อนๆ ที่ GSP กำหนดไว้ให้ในเมนูและคำสั่งย่อยแล้ว เรายังสามารถสร้างรูปเรขาคณิตที่มีสมบัติตามต้องการ ที่เราใช้บ่อยครั้งเก็บไว้ใช้ส่วนตัวได้อีก เช่น

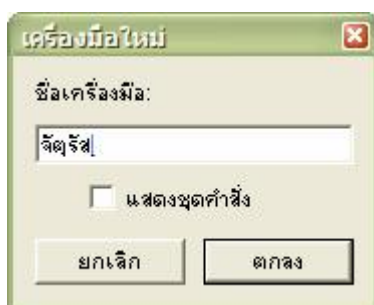
เครื่องมือกำหนดเองรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ขั้นตอนการสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. คลิกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB เลือกเมนูสร้าง \rightarrow วงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
3. ที่จุด B ให้สร้างลักษณะเดียวกัน จากนั้นหาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตรงที่ตัดวงกลมทั้ง 2 จุด ตั้งชื่อเป็นจุด C และ D
4. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่ ให้ได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD
5. ซ่อนวงกลมและเส้นตรงที่ไม่ต้องการแสดงทั้งหมด

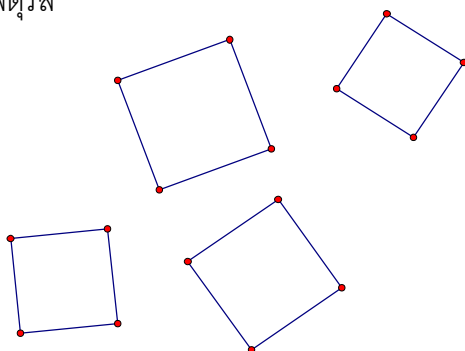
ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือกำหนดเองรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

1. เลือกที่จุด A , ส่วนของเส้นตรง AB, จุด B , ส่วนของเส้นตรง BC, จุด C, ส่วนของเส้นตรง CD, จุด D และส่วนของเส้นตรง DA ตามลำดับ
2. เลือกที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง \rightarrow สร้างเครื่องมือใหม่ ตั้งชื่อในกล่องโต้ตอบ



การเรียกใช้เครื่องมือที่เรากำหนดเองไว้แล้ว

- เลือกที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเองค้างไว้ แล้วเลือกไปยังชื่อเครื่องมือที่เราตั้งไว้ เช่น จัตุรัส นำมาวางที่แบบร่างที่หน้าจอ เลือกครั้งที่ 1 จะเกิดเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขึ้นมาที่ปลายเมาส์ คลิกวางตำแหน่งอีกจุดหนึ่งที่ต้องการ ก็จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส





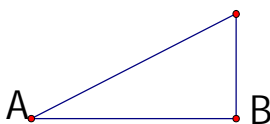
เครื่องมือกำหนดเองรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงตามกำหนด

ในการสร้างทางเรขาคณิตบางครั้ง เราต้องการใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เรากำหนดความสูงของด้านประกอบมุมฉากให้ยึดหยุ่นตามต้องการได้ มีวิธีการหนึ่งในการสร้างดังนี้

กำหนด XY เป็นส่วนของเส้นตรงที่จะกำหนดเป็นความสูงและสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB และเลือกที่จุด B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี XY เขียนวงกลม
2. สร้างเส้นตั้งฉากที่จุด B
3. สร้างจุดใดๆ บนเส้นตั้งฉากที่ได้ จากนั้นเชื่อมจุดทั้งสามด้วยส่วนของเส้นตรง
4. ซ่อนส่วนที่ไม่ต้องการแสดง จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และเส้นแสดงความสูง

x ——— y



การเก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเอง รูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่สามารถกำหนดความสูงตามต้องการ

1. เลือกตามลำดับดังนี้ จุด A , AB , จุด B , ส่วนของเส้นตรง XY , BC , จุด C , AC ตามลำดับ
2. เลือกที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง ตั้งชื่อเช่น สามเหลี่ยมมุมฉากกำหนดสูง หรืออื่นๆ

การเรียกเครื่องมือมาใช้ทำตามลำดับดังนี้

1. เลือกที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง เลือกชื่อของเครื่องมือที่ต้องการ
2. เลือกที่แบบร่างที่วางอยู่จุดที่ 1 และจุดที่ 2 เพื่อลากส่วนของเส้นตรงที่เป็นฐานของสามเหลี่ยม ใช้เมาส์ชี้ที่ส่วนเส้นตรงที่ต้องการให้เป็นความยาวของส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต้องการ จะปรากฏรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้โดยอัตโนมัติ
3. เมื่อได้ความสูงตามที่ต้องการแล้ว ก็คลิกที่เส้นที่ชี้ขึ้น จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีส่วนสูงตามที่ต้องการ

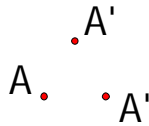


เครื่องมือกำหนดเองรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

ในการสร้างทางเรขาคณิต บางครั้งเราอาจต้องการใช้รูปที่มีขนาดเท่าๆ กันหลายๆ รูป เรามีวิธีกำหนดรูปที่มีขนาดแน่นอน เก็บไว้เรียกใช้บ่อยเท่าที่ต้องการดังนี้

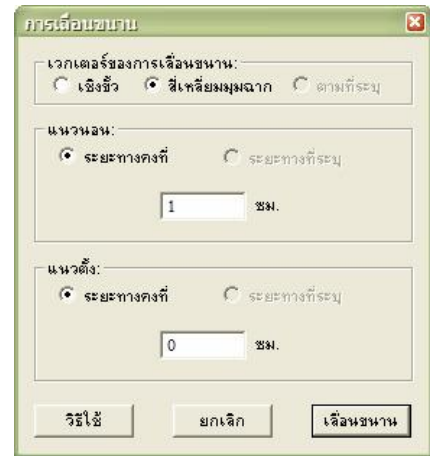
การเก็บเครื่องมือรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านตามต้องการ (ในที่นี้ยาวด้านละ 1 ซม.)

1. สร้างจุดอิสระขึ้นมา 1 จุด ตั้งชื่อ จุด A
2. เลื่อนขนานจุด A ไป 1 ซม. เช่นอาจเลือกการเลื่อนขนานแบบเชิงขั้ว 60 องศา จะได้จุด A' และเลื่อนขนานจากจุด A ไป 1 ซม. โดยเลือกการขนานแบบเชิงขั้ว ศูนย์องศาจะได้ดังภาพ



สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสาม จะได้รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านละ 1 ซม.

3. ซ่อนป้ายชื่อของจุดเหลือเฉพาะรูปสามเหลี่ยม เลือกคลุมรูปทั้งหมด เลือกปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง คำสั่งสร้างเครื่องมือใหม่ ตั้งชื่อเป็น สามเหลี่ยมด้านเท่า



การสร้างเครื่องมือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีความยาวตามต้องการ (ในที่นี้ยาวด้านละ 1 ซม.)

1. สร้างจุดอิสระขึ้นมา 1 จุด เลื่อนขนานจุดนี้ไป 1 ซม. โดยอาจเลือกขนานแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก กำหนดแนวตั้งเป็น 0 ซม. แนวนอน 1 ซม. ดังภาพ
2. เลือกที่จุดทั้งสอง เลื่อนขนานแบบสี่เหลี่ยมมุมฉากกำหนดแนวนอนเป็น 0 ซม. แนวตั้ง 1 ซม.
3. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่



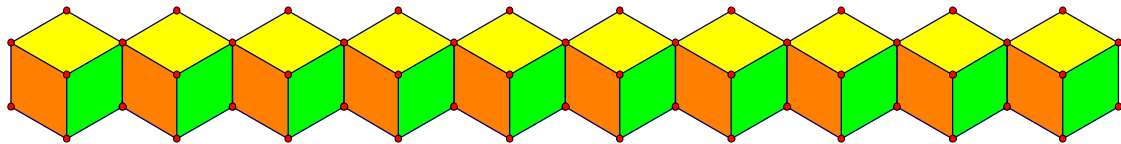
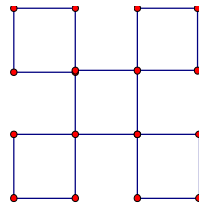
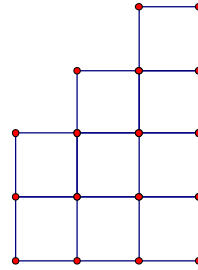
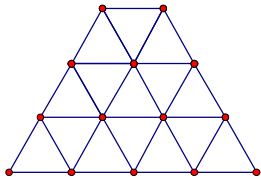
วิธีเก็บรูปเรขาคณิตที่มีขนาดคงที่ ไว้ในปุ่มเครื่องมือสร้างเอง

เลือกคลุมรูปที่สร้างทั้งหมด เก็บเป็นเครื่องมือ โดยสร้างเครื่องมือใหม่แล้วกำหนดชื่อ



การนำเครื่องมือกำหนดเองไปใช้

เมื่อเราเก็บรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่สามารถกำหนดความสูงตามต้องการและรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่กำหนดขนาดของด้านได้ตามต้องการไว้ในเครื่องมือกำหนดเองแล้ว เราสามารถเลือกป้อนนั้นมาใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่แสดงความสัมพันธ์ของพื้นที่บนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้ หรืออาจนำมาสร้างรูปทฤษฎีเลขขั้นแบบต่างๆ เช่น

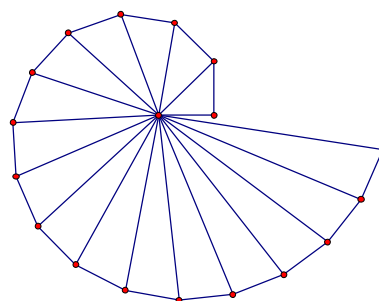


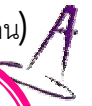


การสร้างสื่อแสดงจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ

การสร้างรูปแสดงจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ สามารถสร้างโดยใช้เครื่องมือกำหนดเองดังนี้

- สร้างเครื่องมือกำหนดเองรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงตามที่ต้องการ
 - สร้างส่วนของเส้นตรง xy ยาวพอสมควร
 - สร้างส่วนของเส้นตรง AB จากนั้นสร้างเส้นตั้งฉากที่จุด B
 - สร้างวงกลมให้ที่จุด B โดยคลิกที่จุด B และเลือกส่วนของเส้นตรง xy เป็นรัศมี
 - หาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตั้งฉากที่จุด B ตั้งชื่อเป็นจุด C
 - ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A กับ C และ B กับ C จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - ทำการซ่อนส่วนที่ช่วยในการสร้างทั้งหมดให้มืองค์ประกอบแสดงให้เห็นเฉพาะรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและเส้น xy
- เก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเอง (ควรทำการซ่อนป้ายชื่อของแต่ละจุด)
 - คลิกตามลำดับดังนี้ คลิกที่จุด A , ส่วนของเส้นตรง AB , จุด B , ส่วนของเส้นตรงที่ xy , ส่วนของเส้นตรง BC , จุด C และส่วนของเส้นตรง AC ตามลำดับ
 - เลือกที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง ตั้งชื่อเครื่องมือใหม่เป็น สามเหลี่ยมมุมฉากสูง 1 หน่วย
- สร้างรูปก้นหอยโดยเลือกเครื่องมือกำหนดเองและเลือกสามเหลี่ยมมุมฉาก ลากฐานของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปแรก โดยคลิกที่จุดแรกและลากไปยังจุดที่สองที่ห่างกันพอควร (a หน่วย) แล้วใช้เมาส์ชี้ที่เส้นฐานดังกล่าวต่อเส้นฐานนั้นจะเปลี่ยนเป็นสีฟ้าและจะปรากฏเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากับฐานที่เมาส์ชี้
- สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่สองบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปแรกต่อโดยคลิกที่จุดแรกและจุดที่สองตามความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก จากนั้นคลิกที่ฐานของสามเหลี่ยมรูปแรก จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาโดยอัตโนมัติ โดยที่มีความยาวฐานยาวเท่ากับด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมรูปแรก
- จากนั้นคลิกต่อๆ กันไปโดยเริ่มฐานจากด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต่อๆ กันมาและความสูงเท่ากับฐานของสามเหลี่ยมรูปแรก จะได้ดังภาพ
- ถ้าให้ความยาวฐานของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปแรกยาว 1 หน่วย จะได้ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมรูปแรกยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

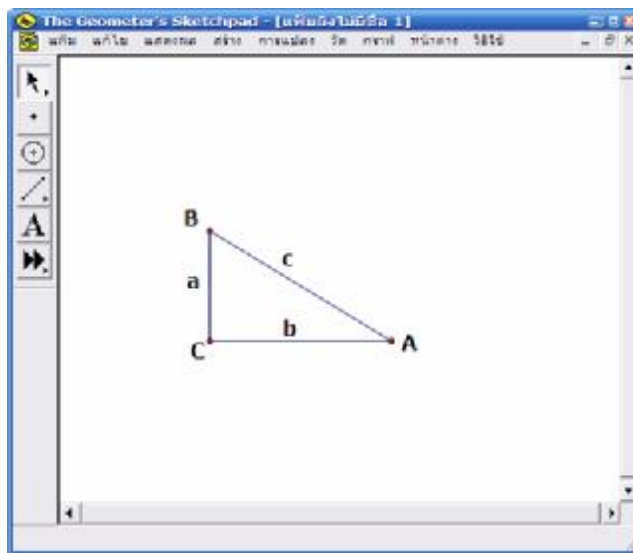


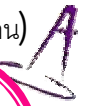


การสร้างสื่อการสอนเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ในทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังนี้ "กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก" นั้น เพื่อช่วยให้นักเรียนเห็นภาพของความสัมพันธ์ชัดเจนขึ้น เราอาจใช้การสร้างรูปเรขาคณิตช่วยแสดงได้หลายวิธี ตัวอย่างการสร้าง เช่น

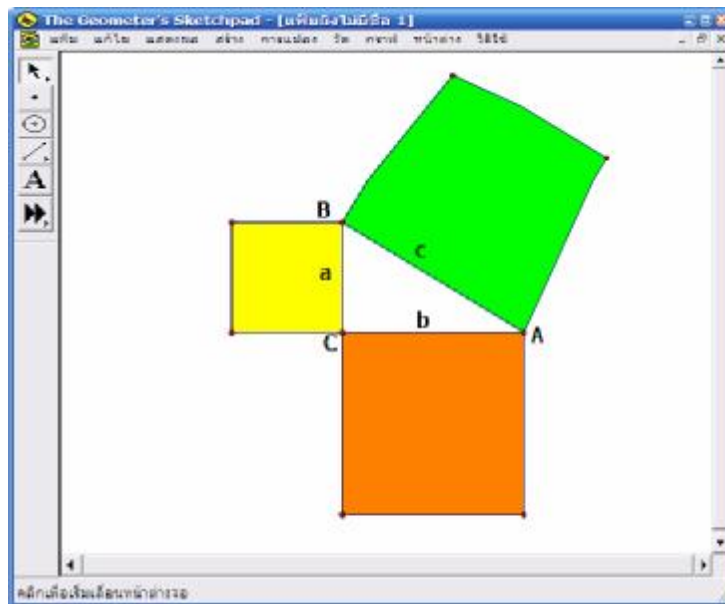
1. สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยสร้างส่วนของเส้นตรง AB
2. คลิกที่จุด A และส่วนของเส้นตรง AB สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB ผ่านจุด A
3. กำหนดจุด B บนเส้นตั้งฉาก ให้จุด B เลื่อนไปมาได้
4. ซ้อนเส้นตั้งฉาก ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด





2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยม

- ไปที่เครื่องมือกำหนดเอง เลือกเครื่องมือสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างไว้
- คลิกที่จุด **B** กดปุ่มซ้ายค้างไว้ แล้วลากมาตามเข็มนาฬิกาให้ปลายมาพบกับจุด **A** จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน ส่วนของเส้นตรง **AB** ทำเช่นนี้จนครบทุกด้าน
- กดแป้น **ESC** เพื่อออกจากคำสั่งการสร้างสี่เหลี่ยมจัตุรัส
- คลิกทุกจุดของมุมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปเมนู วัด คำสั่ง ภายใน ไล่สี่ และวัดพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามรูป



- ใช้เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ จะเกิดกล่องคำนวณ ให้คลิกค่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน **a** และคลิกเครื่องหมายบวกในกล่อง จากนั้นจึงคลิกค่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน **b** คลิก ตกลง จะได้ค่าผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน **a** และด้าน **b**





การแสดงสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน a

- ให้คลิกที่พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ไปเมนูสร้าง ซ้อนบริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ทำทุกรูป
- สร้างเส้นขนานกับด้าน a ให้ผ่านด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่ตรงข้ามกับด้าน a
- กำหนดจุดบนเส้นขนานนี้ให้ชื่อจุด D ให้ D สามารถลากไปมาได้
- ลากส่วนของเส้นตรง BD ลากเส้นขนานกับ BD ผ่านจุด C สร้างจุดตัด ใสชื่อจุด E
- ซ่อนเส้นขนาน ลากส่วนของเส้นตรง CE สร้างภายในรูป BCED ใสสี่

สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน b

สร้างเส้นขนานกับด้าน b ให้ผ่านด้านของสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่ตรงข้ามกับด้าน b กำหนดจุดบนเส้นขนานนี้ให้ชื่อจุด F ให้ F สามารถลากไปมาได้ ลากส่วนของเส้นตรง AF ลากเส้นขนานกับ AF ผ่านจุด C ตัดเส้นขนานที่จุด G ลาก AF และ GC สร้างส่วนภายในของรูป ACFG ใสสี่

ACGF เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน b ใช่หรือไม่ เพราะเหตุใด

ลองลากจุด D และ F เพื่อตรวจสอบดูว่า

- รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน a มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน a จริง
- รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน b มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน b จริง
- การตรวจสอบ ลองใช้เมนูวัดเรียก เครื่องคำนวณ เพื่อหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน a และพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานบนด้าน b

การสร้างรูปหกเหลี่ยมบนด้าน C

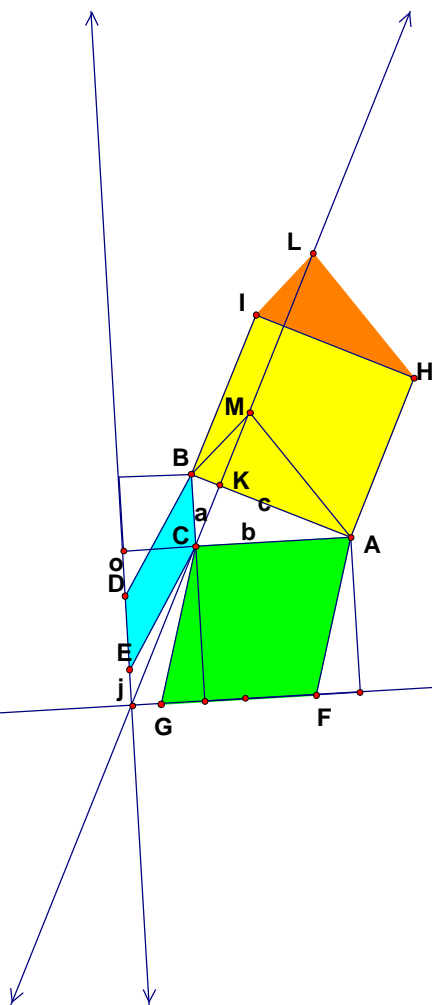
ใสชื่อจุดรูปของสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน C ว่า ABH

- สร้างเส้นตั้งฉากกับด้าน AB ผ่านจุด C หาจุดตัดของเส้นตั้งฉากนี้กับด้าน AB ใสชื่อ K
- ลงจุด L บนเส้นตั้งฉากให้ L วิ่งไปมาได้ ลาก IL และ HL สร้างเส้นขนานกับ IL ผ่านจุด B และสร้างเส้นขนานกับ HL ผ่านจุด A เส้นขนานทั้งสองตัดกันที่จุด M
- เลือกจุด A, H, L, I, B และ L ซึ่งเป็นรูปหกเหลี่ยม สร้างพื้นที่ภายในของรูปหกเหลี่ยม



การแสดง

- 1) ลากจุด L ให้จุด M ลงมาถึงจุด C รูปหกเหลี่ยม $AHLIBM$ จะเลื่อนมาบนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 ลากจุด D และลากจุด F มาพบกันที่ J
 รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งสองรูปจะเป็นรูปหกเหลี่ยม
 คลิกที่รูปหกเหลี่ยม $AHLIBM$ ไปเมนูแก้ไข คัดลอก และวาง
 คลิกรูปที่คัดลอกไว้มาวางทับบนรูปหกเหลี่ยมที่อยู่ติดกันเพื่อดูความสัมพันธ์



แผนภูมิรูปวงกลม

การนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิรูปวงกลม ใช้วิธีแบ่งเนื้อที่ของรูปวงกลมเป็นส่วนย่อยตามปริมาณที่ต้องการเปรียบเทียบ มีขั้นตอนในการสร้างดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งได้รับเงินเดือนๆ ละ 12,000 บาท มีรายจ่ายในรอบเดือนมีนาคม 2548 ดังตารางต่อไปนี้

รายจ่าย	จำนวนเงิน (บาท)
ค่าอาหาร	3,600
ค่าเสื้อผ้า	1,200
ฝากธนาคาร	2,400
เบ็ดเตล็ด	4,800
รวม	12,000

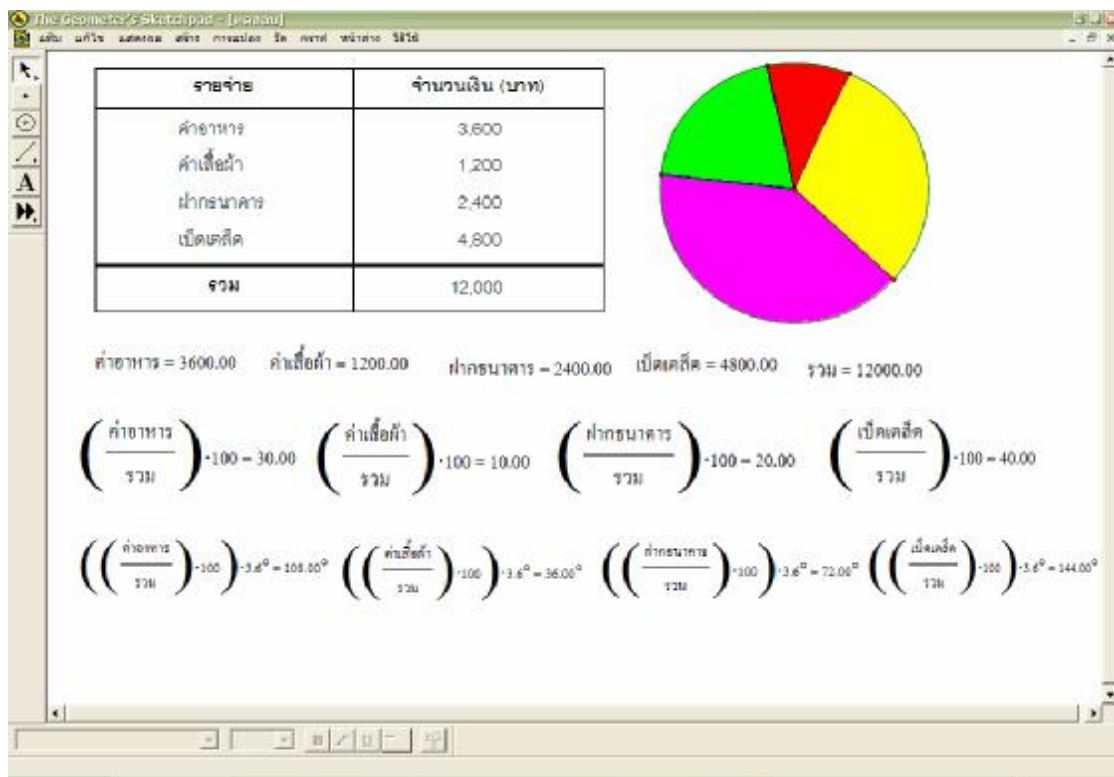
1. สร้างพารามิเตอร์จากเมนูกราฟ โดยตั้งชื่อและกำหนดค่าดังข้อมูลในตาราง จะได้ค่าพารามิเตอร์ 4 ค่า
2. หาผลรวมของค่าพารามิเตอร์ โดยใช้เครื่องคำนวณจากเมนูวัด เมื่อหาผลรวมแล้วเปลี่ยนป้ายชื่อเป็นคำว่า รวม
3. คำนวณหาค่าเป็นเปอร์เซ็นต์โดยคิดจากค่าพารามิเตอร์แต่ละค่าหารด้วยผลรวมคูณด้วย 100
4. ใช้เครื่องคำนวณจากเมนูวัด หาขนาดมุมที่จุดศูนย์กลางวงกลมโดยคิดจากค่าที่ได้จากเปอร์เซ็นต์ของการคำนวณแต่ละค่า คูณด้วย 3.6 (เมื่อคูณด้วย 3.6 ให้ระบุหน่วยเป็นองศา จะได้ค่าที่ได้มีหน่วยเป็นองศา ดังภาพตัวอย่าง)

$$\left(\left(\frac{\text{ค่าอาหาร}}{\text{รวม}} \right) \cdot 100 \right) \cdot 3.6^\circ = 10800^\circ$$

5. สร้างรูปวงกลมขึ้นมา 1 รูป ขนาดพอสมควร ทำการซ่อนจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงกลม และสร้างจุดใดๆ ขึ้นมาที่วงกลมหนึ่งจุด (จุดนี้จะสามารถวางอยู่บนเส้นของวงกลมได้)
6. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดนี้กับจุดศูนย์กลาง



7. คลิกที่จุดศูนย์กลางของวงกลม เลือกระบุจุดศูนย์กลางจากเมนูการแปลง
8. คลิกที่มุมแรกที่วัดได้ แล้วเลือกระบุมุมจากเมนูการแปลง (เพื่อจะหมุนตามมุมที่ระบุ)
9. คลิกที่ส่วนของเส้นตรงและจุดบนเส้นวงกลม เลือกเมนูการแปลง → หมุน ซึ่งจะปรากฏหน้าต่างเป็นการหมุนตามค่ามุมที่ระบุ
10. ทำเช่นเดียวกันจนครบตามจำนวนทั้งหมด ทำการระบายสีแต่ละส่วน (การระบายสีแต่ละส่วนต้องสร้างส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยมุมที่จุดศูนย์กลางวงกลมนั้นๆ ก่อน แล้วจึงเลือกระบายสีภายในเซกเตอร์)
11. จะได้ดังภาพตัวอย่าง





การสร้างสื่อการสอนเรื่อง ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับพื้นที่ที่มากที่สุด

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีผลรวมของด้านกว้างและด้านยาวเป็น 10 เซนติเมตร จะมีรูปแตกต่างกันได้มากมาย แต่รูปที่มีพื้นที่มากที่สุดนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดอย่างไร เราสามารถสร้างสื่อการสอนเพื่อสำรวจขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังกล่าวได้ดังนี้

1. สร้างจุดๆหนึ่ง เช่น จุด A

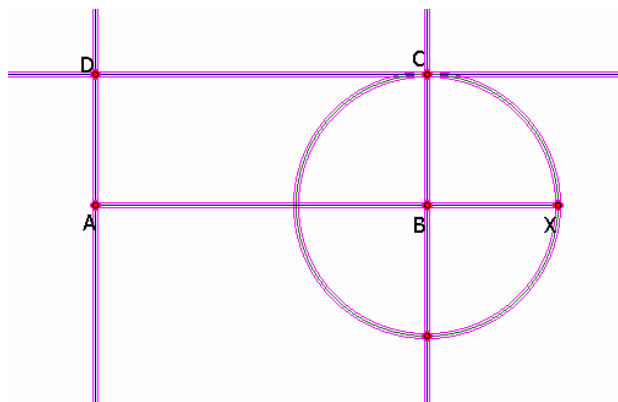
จากจุด A ให้เลื่อนขนาน จุด A ในแนวนอนไป 10 ซม. ซึ่งเป็นผลรวมของความยาวของด้านกว้างและด้านยาว ให้ชื่อจุดใหม่ที่ได้ว่าจุด X ลากส่วนของเส้นตรง AX

2. สร้างจุด B ใดๆบนส่วนของเส้นตรง AX

3. สร้างวงกลมที่มี จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวตามส่วนของเส้นตรง BX

4. สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB ตัดวงกลม B ที่

จุด C สร้างสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD



8. สร้างพื้นที่ภายในรูปสี่เหลี่ยม ABCD

9. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรง AB และ BC และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD

10. สร้างตารางจากเมนู กราฟ เพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ ของความกว้างความยาว และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD

โดยเลือกตามลำดับต่อไปนี้

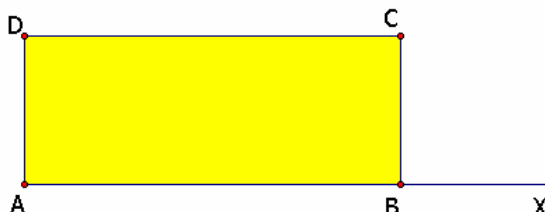
ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB ความยาวของส่วนของเส้นตรง BC และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งสร้างตาราง

จะได้ตาราง ดังภาพ ที่แสดงให้เห็นค่าของความยาวของส่วนของเส้นตรง AB , ส่วนของเส้นตรง BC และพื้นที่ เมื่อเพิ่มข้อมูลหลายๆ จำนวนจากเมนูกราฟ ใช้ข้อมูลเหล่านี้สร้างข้อความคาดการณ์ เรื่องความสัมพันธ์ได้

$$m \overline{AB} = 7.17 \text{ ซม.}$$

$$m \overline{BC} = 2.83 \text{ ซม.}$$

$$\text{พื้นที่ } ABCD = 20.29 \text{ ซม.}^2$$



ความยาว	ความกว้าง	พื้นที่
7.17	2.83	20.29

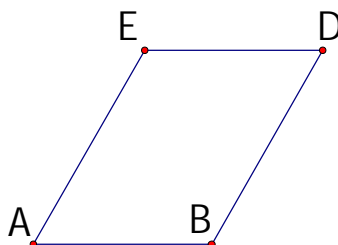




การสร้างภาพแสดงการเปิดแผ่นกระดาษ

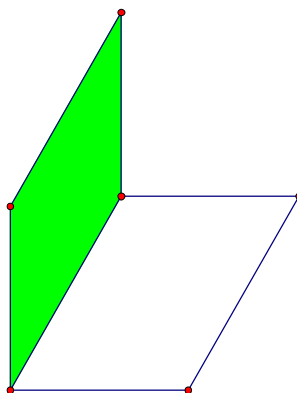
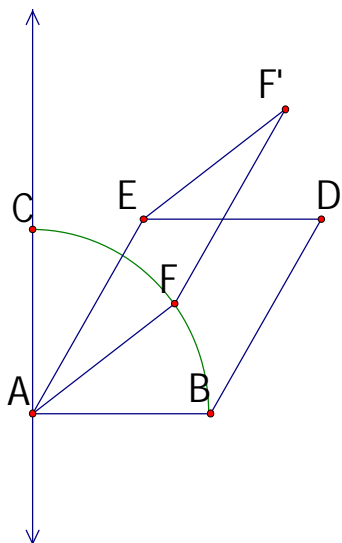
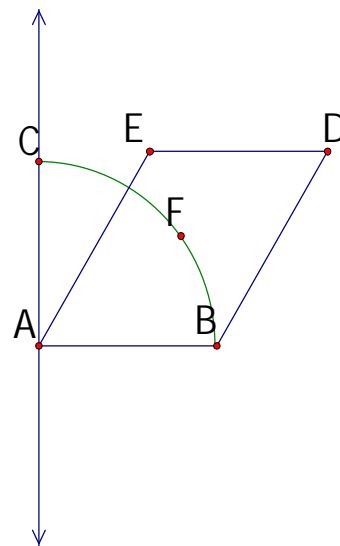
การสร้างภาพแสดงการเปิดแผ่นกระดาษมีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. เลือกเครื่องมือวาดเส้นสร้างส่วนของเส้นตรง **AB** สร้างเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังภาพ



2. เลือกที่จุด **A** สร้างเส้นตั้งฉาก
3. เลือกที่จุด **A** และส่วนของเส้นตรง **AB** สร้างวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
4. หาจุดตัดของวงกลมและเส้นตั้งฉาก ตั้งชื่อจุด **C**
5. สร้างส่วนโค้ง **BC** โดยเลือกที่จุด **A B** และ **C** ในทิศทวนเข็มนาฬิกา เลือกที่เมนูสร้าง คำสั่งส่วนโค้งบนวงกลม ซ่อนวงกลมเพื่อให้เห็นเฉพาะส่วนโค้งที่สร้าง
6. สร้างจุดบนส่วนโค้งของวงกลม ตั้งชื่อจุด **F**

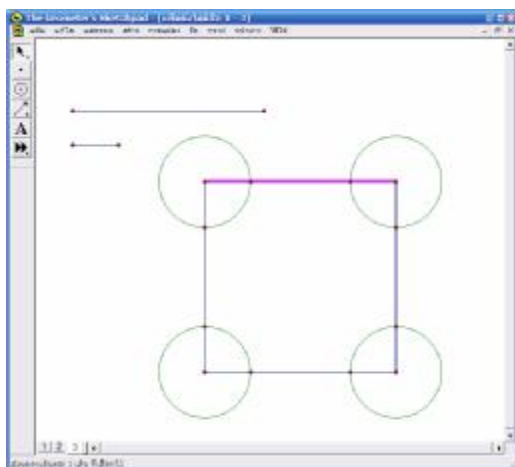
7. ระบุเวกเตอร์ที่จุด **B** และ **D** เลื่อนขนานจุด **F** จะได้จุด **F'**
8. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด **F, F'** และจุด **E** กับ **F'**
9. ระบายสีและ ซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการแสดงทั้งหมด จะได้ผลดังภาพ



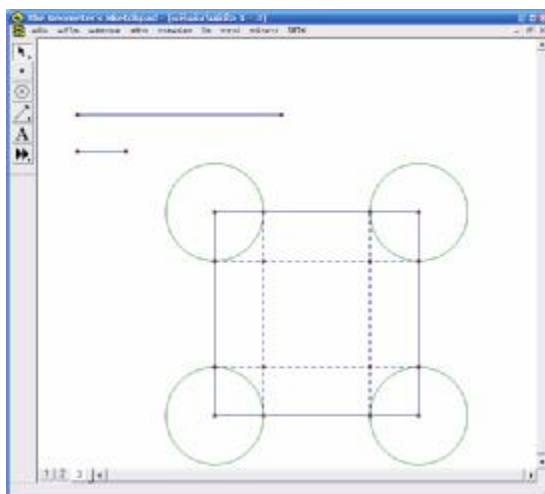
การสร้างสื่อแสดงภาพกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

การสร้างสื่อแสดงภาพกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1. สร้างตัวเลื่อน (Slider) มา 2 เส้น โดยเส้นหนึ่งกำหนดเป็นความยาวของด้านสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกหนึ่งเส้นกำหนดเป็นความยาวที่จะต้องตัดออกในแต่ละมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยให้มีความยาวเท่ากับตัวเลื่อน (Slider) ที่กำหนดความยาวของด้านสี่เหลี่ยมจัตุรัส (ใช้เครื่องมือวงเวียนช่วยในการสร้าง) ตั้งชื่อเป็น ABCD
3. คลิกที่จุดมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ Slider เส้นที่สั้น (เส้นที่กำหนดความยาวในการตัดมุมออก) สร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับเส้นนี้ จะได้วงกลมทั้ง 4 มุม หาจุดตัดแต่ละเส้น ดังภาพ



4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่ที่เกิดขึ้นและหาจุดตัด เลือกลines เป็นแบบเส้นประ ดังภาพ





5. ทำการซ่อนวงกลมทั้งสี่มุม จะได้รูปกระดาษที่แสดงการตัดมุมทั้งสี่

6. สร้างกล่องแบบ 3 มิติโดยมีวิธีการสร้างดังนี้

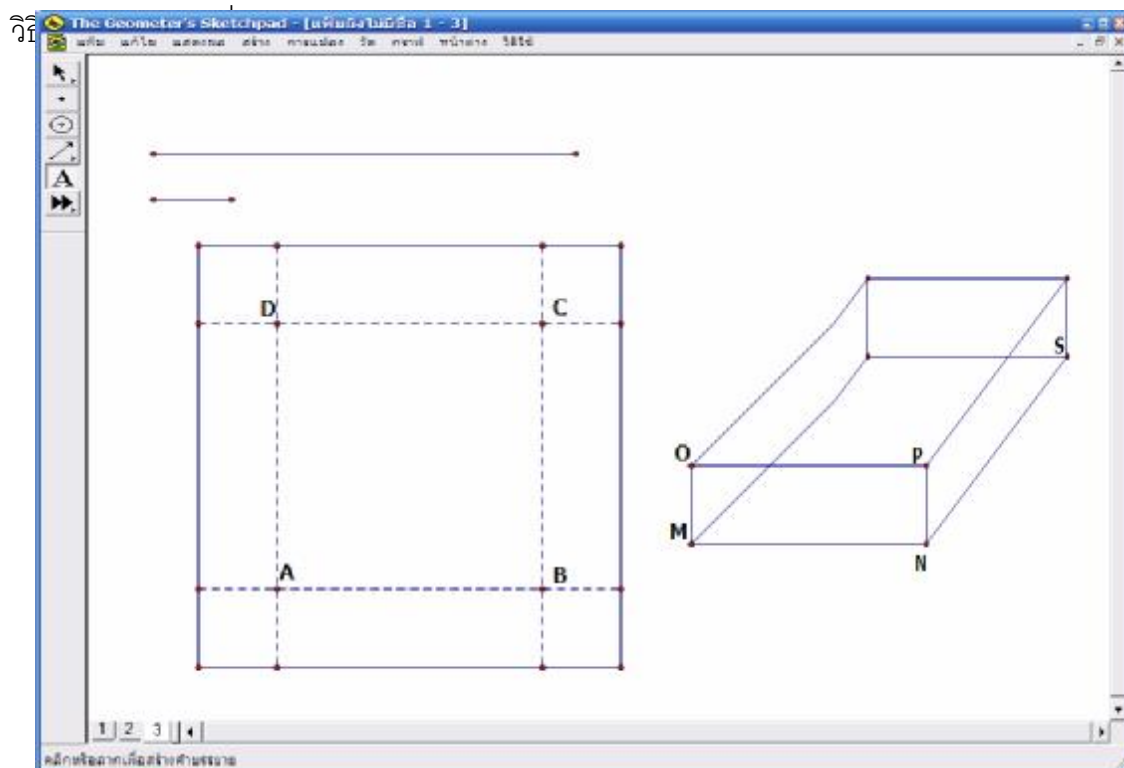
- สร้างฐานของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในบริเวณที่ว่างของแบบร่าง (Sketch) โดยให้มีความยาวเท่ากับ ส่วนของเส้นตรง AB (ความยาวของฐานกล่อง) ตั้งชื่อจุดเป็น M และ N
- สร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับตัวเลื่อน (Slider) ที่เป็นส่วนตัดของสี่เหลี่ยม ที่จุด M สร้างเส้นตั้งฉากที่จุด

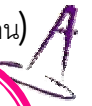
นี้ หา

จุดตัดของวงกลมกับเส้นตั้งฉาก ตั้งชื่อเป็นจุด O

- ที่จุด N สร้างเส้นตั้งฉากกับด้านความยาวฐาน จากนั้นคลิกที่จุด O กับเส้นฐาน สร้างเส้นขนาน หาจุดตัดตั้งชื่อจุดเป็นจุด P
- คลิกที่จุด MNO สร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม จากนั้นสร้างขนานกับเส้นแบ่งครึ่งมุมโดยให้ผ่านจุด O และผ่านจุด P
- คลิกที่จุด N และส่วนของเส้นตรง AB สร้างวงกลมที่มีความรัศมีที่กำหนด หาจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลม ตั้งชื่อเป็นจุด S
- ที่จุด S สร้างเส้นขนานกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P จากนั้นหาจุดตัด เช่นเดียวกันสร้างเส้นขนานจุดอื่น จากนั้นเชื่อมจุดทั้งหมด ซ่อนส่วนที่ไม่ต้องการแสดง จะได้ดังภาพ

ในกรณีที่ต้องการสร้างภาพกล่องกระดาษนี้ให้คลี่ได้ ให้ดำเนินการสร้างแต่ละขั้นที่ด้านทั้งสี่ ตาม

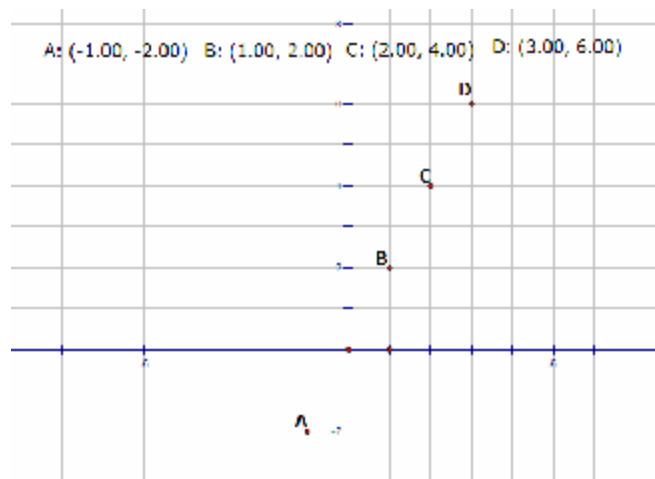




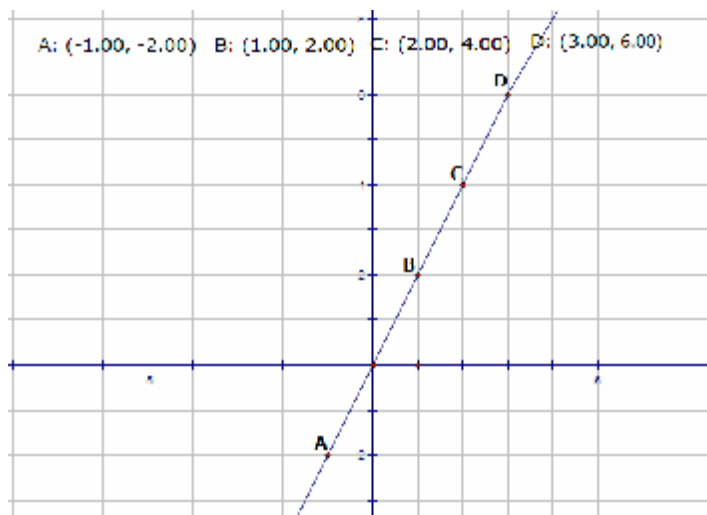
การสอนเรื่อง กราฟของสมการเส้นตรง

ใน GSP มีเมนูกราฟที่ช่วยให้การสอนเรื่องกราฟทำได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้
กราฟเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้

1. สร้างระบบพิกัด โดยไปที่เมนูกราฟ แล้วเลือกคำสั่งกำหนดระบบพิกัด
2. เลือกคำสั่งลงจุดจากเมนูกราฟ ให้นักเรียนทดลองลงจุดของคู่อันดับ



3. เลือกจุด 2 จุด เช่น A และ D แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นตรง



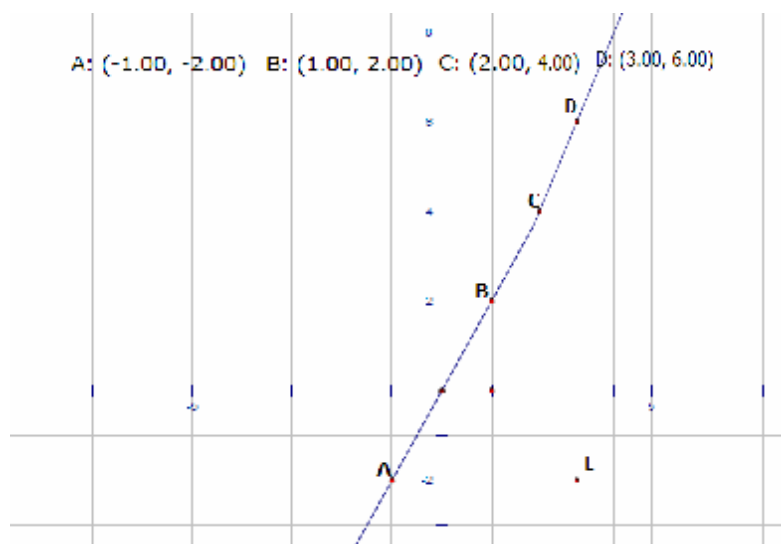
4. อธิบายความหมายของความชันของกราฟเส้นตรง โดยให้นักเรียนเลือกจุด A และแกน X แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นขนาน จากนั้นเลือกจุด D และแกน y ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นขนาน





5. จากเส้นขนานกับแกน X ผ่านจุด A และเส้นขนานกับแกน y ผ่านจุด D สร้างจุดตัด E

$$\text{ความชันของ เส้นตรง} = \frac{\text{ระยะจาก } E \rightarrow D}{\text{ระยะจาก } A \rightarrow E}$$

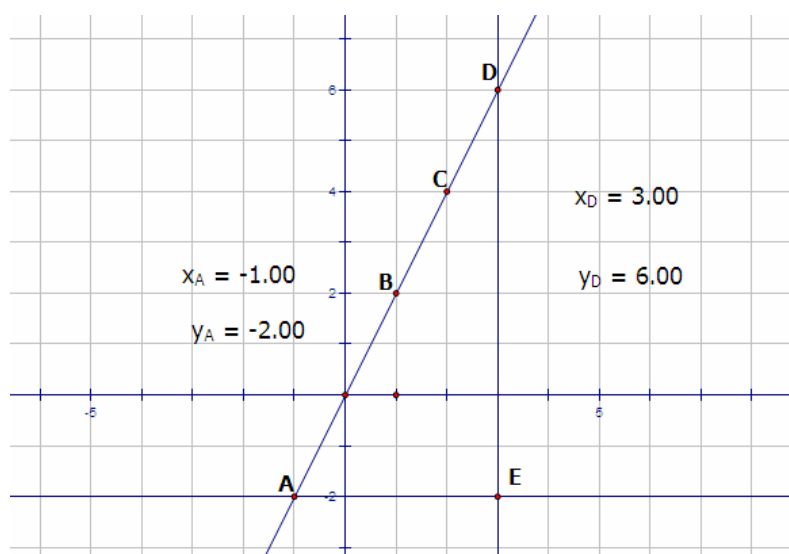


$$\text{หรือ ความชันของเส้นตรง} = \frac{\text{ระยะจาก } D \rightarrow E}{\text{ระยะจาก } E \rightarrow A}$$

6. ให้นักเรียนหาความชันของกราฟเส้นตรง โดยการคำนวณจากเมนูวัด

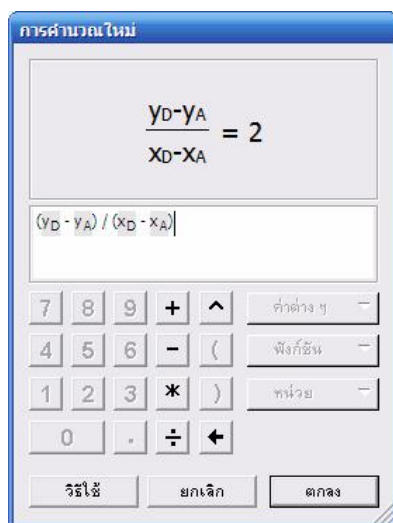
- เลือกจุด A ไปที่เมนูวัด เลือกวัดพิกัดที่หนึ่ง (x) จะได้ค่า x_A
- เลือกจุด A ไปที่เมนูวัด เลือกวัดพิกัดที่สอง (y) จะได้ค่า y_A

ในการทำงานเดียวกัน วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) และวัดพิกัดที่สอง (y) ของจุด D





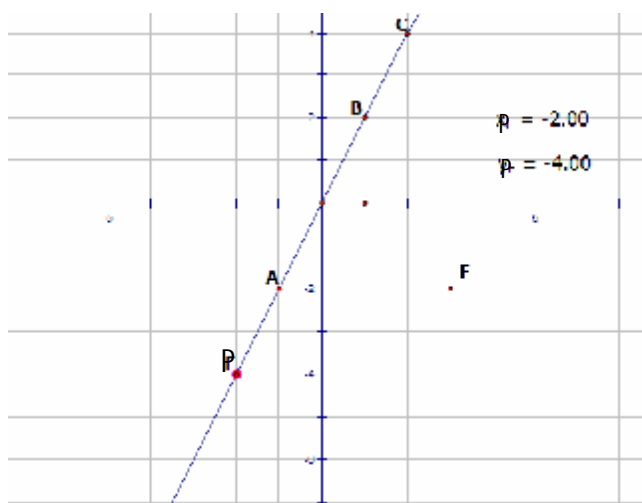
- ไปที่เมนูวัด เลือกคำสั่งคำนวณ ป้อนค่า $(y_D - y_A)/(x_D - x_A)$ ลงในเครื่องคำนวณ



จะได้ค่าความชันของกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้ ครูสามารถให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบได้โดยให้นักเรียนเลือกกราฟเส้นตรงแล้วไปที่เมนูวัด เลือกคำสั่งความชัน GSP จะแสดงความชันของกราฟเส้นตรงให้

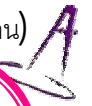
7. การหาสมการของกราฟเส้นตรง

- เลือกกราฟเส้นตรง ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งจุดบนเส้นตรง ตั้งชื่อจุดที่ได้เป็นจุด P จุด P นี้สามารถเลื่อนไปมาได้บนกราฟเส้นตรง
- เลือกจุด P แล้วไปที่เมนูวัด เลือกคำสั่ง วัดพิกัดที่หนึ่ง (x) จะได้ค่า x_p เลือกจุด P แล้วไปที่เมนูวัดเลือกคำสั่ง วัดพิกัดที่สอง (y) จะได้ค่า y_p



เมื่อลากจุด P จะสังเกตเห็นค่า x_p และ y_p เปลี่ยนแปลง





- เลือก X_p และ y_p แล้วไปที่เมนูกราฟเพื่อสร้างตาราง

X_p	y_p
-2.00	-4.00

เพิ่มจำนวนแถวในตารางเพื่อให้ได้ข้อมูลมากพอสำหรับให้นักเรียนเพื่อใช้ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัด X และ y ของจุดบนกราฟเส้นตรงและสรุปเป็นสมการ

การเพิ่มจำนวนแถวในตารางมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือกตารางแล้วไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งเพิ่มตารางครั้งละ 1 แถว จากนั้นเพิ่มแถวของตาราง โดยการเลื่อนจุด P ไปยังตำแหน่งที่ต้องการแล้วคลิกเมาส์เพื่อรับค่า X_p และ y_p ของตำแหน่งใหม่
2. เลือกตารางแล้วกดแป้น + หรือ Shift และ + เพื่อเพิ่มแถวของตารางอีก 1 แถว
3. เลือกจุด P แล้วลากไปยังตำแหน่งใหม่ คลิกเมาส์เพื่อรับค่า X_p และ y_p ค่าใหม่
4. ทำซ้ำข้อ 2, 3 เมื่อต้องการเพิ่มจำนวนแถว
5. ถ้าต้องการลบจำนวนแถวให้กดแป้น - หรือ shift และ -

เมื่อได้ข้อมูลมากพอ ก็ให้นักเรียนสรุปว่า X และ y มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และสรุปออกมาเป็นสมการของกราฟเส้นตรงตามข้อมูลที่สังเกตได้

- เลือกกราฟของเส้นตรงแล้วไปที่เมนูวัด เลือกคำสั่งสมการ จะได้สมการของกราฟเส้นตรง แล้วเปรียบเทียบกับสมการที่นักเรียนได้จากการสังเกตข้อมูล



การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ เมื่อกำหนดโดเมนเป็น $(0, 2\pi)$ โดยอาศัยวงกลม 1 หน่วย

1. สร้างวงกลมที่มีขนาดแน่นอน

กำหนดจุดใดๆ 1 จุด สมมุติชื่อ **จุด A**

สร้างจุดอีก 1 จุดที่ห่างจากจุดแรก 2 ซม. โดยการเลื่อนขนานไปทางซ้ายมือ

ที่จุด A สร้างวงกลมมีรัศมีเท่ากับจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนาน

2. ต้องการสร้างจุดกำเนิดที่ผูกพันกับวงกลมหนึ่งทีสร้างขึ้น

สร้างจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A ในแนวแกน X ห่าง $(2+1=3)$ ซม. เพื่อให้เป็นจุดกำเนิดของกราฟ สมมุติชื่อว่า **จุด O**

คลิกเลือก จุด O ที่เมนูกราฟเลือกคำสั่งกำหนดจุดกำเนิด จะได้จุดกำเนิดที่จุด O

เนื่องจากต้องการให้วงกลมที่เราสร้างมีรัศมี 1 หน่วยเราสามารถปรับความกว้างของแกนได้ดังนี้

- เลื่อนจุดบังคับ หนึ่งหน่วย เพื่อปรับระยะ 1 หน่วย ของตารางให้เท่ากับรัศมีของวงกลม 1 หน่วย แล้วซ่อนจุดบังคับหนึ่งหน่วย

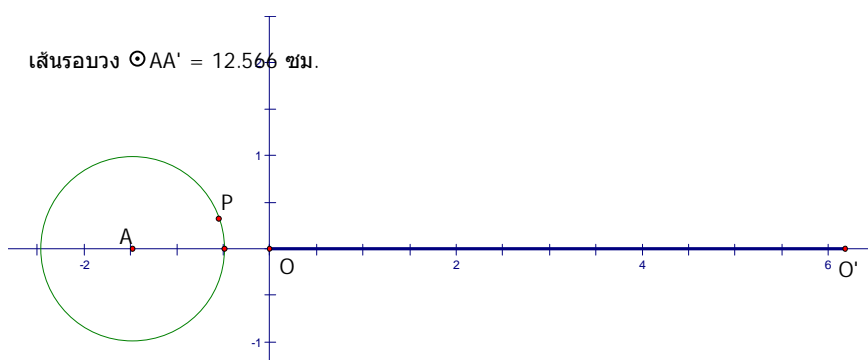
3. ที่จุด O ต้องการสร้างส่วนของเส้นตรงบนแกน X ที่มีความยาวเท่ากับเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

วัดความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม A (ควรใช้ทศนิยมอย่างน้อย 3 ตำแหน่ง)

คลิกเลือกความยาวที่วัดได้ ที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งระบุระยะทาง

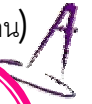
คลิกเลือก จุด O ที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนาน สั้งเลื่อนขนานโดยระยะทางที่ระบุ จะได้ จุด O' ใน

ตำแหน่งที่ต้องการ สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{OO'}$



4. กำหนดจุดกึ่งอิสระ บนวงกลมหนึ่งหน่วย 1 จุด และจุดกึ่งอิสระบน $\overline{OO'}$ 1 จุด





5. สร้างจุดตัดที่จะใช้แสดงกราฟฟังก์ชันไซน์

- เลือกจุดอิสระบน \overline{OO} และเส้นตรง \overline{OO} ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นตั้งฉาก จะได้เส้นตั้งฉากกับ \overline{OO} ผ่านจุดอิสระ
- เลือกจุดอิสระบนเส้นรอบวงของวงกลม A และเส้น \overline{OO} ไปที่เมนูสร้างเลือกคำสั่งเส้นขนาน จะได้เส้นขนานกับ \overline{OO} ผ่านจุดอิสระบนเส้นรอบวงของวงกลม
- เลือกเส้นตรงที่ขนานกับ \overline{OO} และผ่านจุดอิสระบนเส้นรอบวงของวงกลม A กับเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ \overline{OO} และผ่านจุดอิสระบน \overline{OO} แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งสร้างจุดตัดให้ชื่อจุด Q

6. สร้างปุ่มคำสั่งเคลื่อนไหว

เลือกจุดอิสระบนเส้นรอบวงของวงกลม A (P) และจุดอิสระที่อยู่บน \overline{OO} (P1)

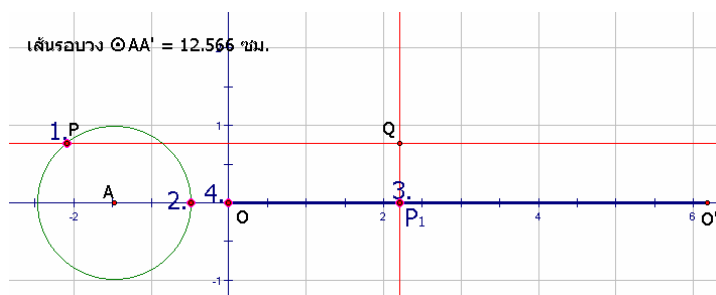
ที่เมนูแก้ไข เลือกปุ่มแสดงการทำงาน แล้วไปเลือก การเคลื่อนไหว

จะได้ หน้าต่างโต้ตอบ พิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดบนส่วนของเส้นตรง เลือกไปข้างหน้า

(* ทั้งจุดอิสระบนเส้นรอบวงกลม A และจุดอิสระบน \overline{OO} ต้องใช้ความเร็วการเคลื่อนไหวเท่ากัน)

7. สร้างปุ่มจุดเริ่มต้น คลิกเลือกตามลำดับดังนี้

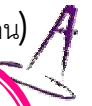
- เลือกจุดอิสระบนเส้นรอบวงของวงกลม A (จุด P) และ เลือกจุดที่ใช้เป็นจุดสร้างเส้นรอบวงของวงกลม (จุด A') ตามลำดับ
- เลือกจุดอิสระบน \overline{OO} จุด(P1) และจุดกำเนิด O (ดูรูป)



ไปที่เมนูแก้ไข เลือกปุ่มแสดงการทำงาน เลือกการเคลื่อนที่ เมื่อหน้าต่างโต้ตอบปรากฏให้เลือกอัตราเร็วชั่วขณะ เปลี่ยนชื่อ ป้าย เป็น ไปที่จุดเริ่มต้น แล้วตอบตกลง

ได้สื่อที่แสดงกราฟตามต้องการ หากการเคลื่อนที่ของเส้นกราฟผิดทิศทางต้องไปแก้ที่สมบัติของการเคลื่อนไหว อีกครั้งตามความเหมาะสม





กราฟของฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย (Trancendental Function) เป็นฟังก์ชันที่มีใช้ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันอดิศัยที่รู้จักและคุ้นเคยกันดีได้แก่ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

ในโปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีสมบัติให้สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันใดๆ ตามที่กำหนด ให้นักเรียนทดลอง ปรับเปลี่ยนค่าคงตัว พิจารณารูปกราฟ ตลอดจนตรวจสอบค่าต่างๆได้ โดยใช้คำสั่งง่ายๆ เช่น

การสร้างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. ที่เมนูกราฟ ..> พารามิเตอร์ใหม่ แล้วกำหนดพารามิเตอร์ 4 ตัว

เช่น a b c d โดยให้ค่าเป็นเท่าไรก็ได้

2. กำหนดฟังก์ชันจากเมนูกราฟ ตัวอย่างเช่น

1. a^x จะได้ $f(x) = a^x$

2. b^x จะได้ $g(x) = b^x$

3. c^x จะได้ $h(x) = c^x$

โดยเลือกจากค่าพารามิเตอร์ a b c และ d ที่กำหนดไว้ก่อนแล้วใส่ในฟังก์ชัน

3. วาดกราฟของฟังก์ชันใหม่ $f(x) = a^x$

ให้นักเรียนพิจารณากราฟของ $f(x) = a^x$ เมื่อพารามิเตอร์เป็นบวกและลบ โดยใช้เครื่องหมาย + และ - บนคีย์บอร์ด ควบคุมการเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์

4. เขียนกราฟ $g(x) = b^x$ ปรับค่า $b = 3$

$h(x) = c^x$ ปรับค่า $c = 5$

ให้พิจารณากราฟ ณ จุด $(0, 1)$

5. สร้าง inverse ของฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ เมื่อ $a = 2$

เลือกเมนูกราฟ คำสั่งฟังก์ชันใหม่ เลือกสมการ $x = f(y)$ จะเห็น y เกิดในกล่องโต้ตอบแทน x

เขียนสมการ $f(y) = a^y$

พิจารณากราฟเมื่อเปลี่ยนค่า a ไปต่างๆ

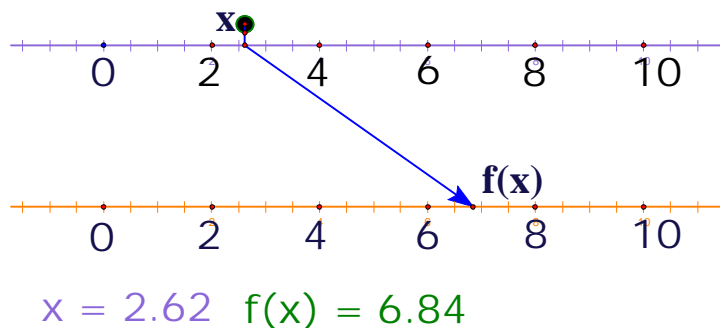
นอกจากนี้ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแล้ว ยังสามารถเขียนของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบต่างๆ เช่น $b \sin ax$, $b \cos ax$, $b \tan ax$ และอื่นๆ เมื่อ a และ b เป็นพารามิเตอร์ ซึ่งจากการพิจารณากราฟดังกล่าว จะช่วยเพิ่มความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับแอมพลิจูดและคาบของฟังก์ชัน



การสร้างสื่อการสอนเรื่องฟังก์ชัน

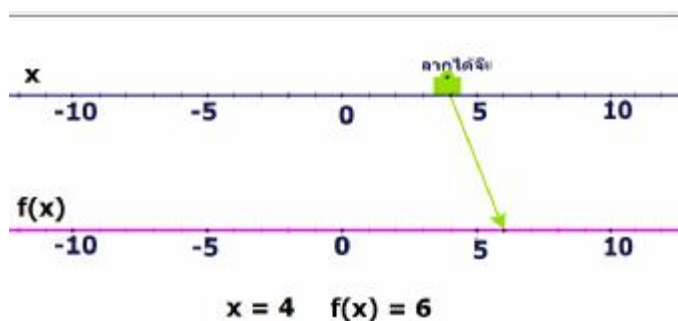
การใช้ GSP สร้างสื่อการสอนเพื่อให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์ระหว่าง X และ $f(x)$ นั้นสามารถทำได้หลายวิธี ตัวอย่างเช่น

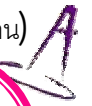
1. ที่เมนูกราฟเลือก - กำหนดระบบพิกัด
 - สแนพจุด
 - ซ่อนกริด
2. คัดลอกแกน X และวาง เลื่อนแกน X ที่คัดลอกมาวางให้จุดกำเนิดอยู่บนแกน Y และห่างจากแกน X เดิมพอสมควร
3. กำหนดชื่อแกนบน เป็นแกนของ X
กำหนดชื่อแกนล่าง เป็นแกน $f(x)$ แล้วซ่อนแกน Y และ ซ่อนจุดย่อ-ขยายแกน
กำหนดจุดเคลื่อนที่อิสระบนแกน X
4. เลือกจุดอิสระบนแกน X (จากข้อ 3) แล้ววัดพิกัดที่หนึ่ง (x)
5. กำหนดฟังก์ชันโดยเลือกเมนูกราฟ .. > ฟังก์ชันใหม่
กำหนด $f(x) = x^2$ คำนวณค่า $f(x)$ จากเมนูวัด โดยใช้พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุดอิสระบนแกน X ที่วัดได้ในข้อ 4 แทนตัวแปร X ในฟังก์ชัน
6. วัดพิกัดทางแกน y ของจุด 0 บนแกน $f(x)$
7. ใช้ค่าที่ได้จากข้อ 5 และ 6 ลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ โดยเลือกค่า $f(x)$ เป็นพิกัดที่หนึ่ง (x) และค่าพิกัดทางแกน y ของจุด 0 บนแกน $f(x)$ เป็นพิกัดที่สอง (y)
8. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุดอิสระบนแกน X และจุดที่ลงใหม่ในข้อ 7 แล้วตกแต่งตามต้องการ
จะได้สื่อการสอนที่ให้นักเรียนได้สังเกตแบบรูปของความสัมพันธ์ของสมาชิกบนแกน X และ แกน $f(x)$
แล้วสร้างเป็นข้อความคาดการณ์และตรวจสอบด้วยการลากจุดที่กำหนดให้ไปมา จากตัวอย่างข้างต้นเงื่อนไขของความสัมพันธ์คือ $f(x) = x^2$



ถ้าต้องการสร้างสื่อการสอนให้ค่าที่ปรากฏเป็นจำนวนเต็ม มีขั้นตอนดังนี้

1. ที่เมนูกราฟเลือก - กำหนดระบบพิกัด
 - สแนพจุด
 - ซ่อนกริด
2. คัดลอกแกน X และวาง เลื่อนแกน X ที่คัดลอกมาวางให้จุดกำเนิดอยู่บนแกน Y และห่างจากแกน X เดิมพอสมควร
3. กำหนดชื่อแกนบน เป็นแกนของ X
กำหนดชื่อแกนล่าง เป็นแกน $f(x)$ แล้วซ่อนแกน Y และ ซ่อนจุดย่อ-ขยายแกน กำหนดจุดเคลื่อนที่อิสระบนแกน X
4. เลือกจุดอิสระบนแกน X (จากข้อ3) แล้ววัดพิกัดที่หนึ่ง (X)
5. ทำให้พิกัด X ที่ได้จากข้อ 4. เป็นจำนวนเต็ม โดยเลือกเมนูวัด...>เลือกคำสั่ง คำนวณ ได้กล่องโต้ตอบ
..>เลือกฟังก์ชัน round เดิมค่า X ที่วัดได้ในวงเล็บ
6. ซ่อนพิกัดที่วัดได้จากข้อ 4 (ค่า X เป็นจำนวนจริง) เหลือค่า X ที่เป็นจำนวนเต็มเปลี่ยนชื่อเป็น X
7. วัดพิกัดที่สอง (y) ของจุดกำเนิดบนแกน X
8. เลือกค่าที่ได้จากการวัดลงจุดแบบ (X,Y) บนแกน X จากเมนูกราฟ โดยใช้ค่า X_x จากข้อ 6. และ y_0 จากข้อ 7
กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ โดยเลือกเมนูกราฟ ฟังก์ชันใหม่ กำหนด $f(x) = 2(x - 1)$
จากเมนูวัด ...>คำสั่งคำนวณ คำนวณค่า $f(x)$ โดยใช้ค่า X เป็นจำนวนเต็ม(ข้อ 5.)
9. วัดพิกัดแกน Y ของจุดกำเนิด บนแกน $f(x)$
10. ลงจุดแบบ (X,Y) บนแกน $f(x)$ โดยใช้ค่า $f(x)$ จากข้อ 7 เป็นพิกัดที่หนึ่งและพิกัดที่สองจากข้อ 8 เป็น $(f(x), y_0)$
11. ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดบนแกนทั้ง 2 ที่ได้จากการลงจุด
12. สร้างปุ่มเลื่อน ตกแต่งตามความต้องการ





การสร้างสื่อการสอนเรื่องเวกเตอร์

เวกเตอร์

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์

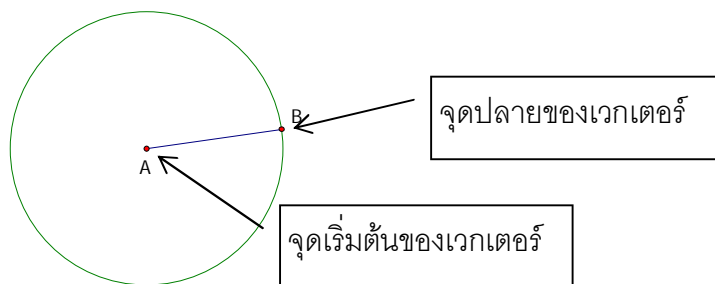
จากบทนิยามจะพบว่า ปริมาณเวกเตอร์ประกอบด้วยสองส่วนที่สำคัญคือ ทิศทาง และ ขนาด ในเชิงเรขาคณิต แทนทิศทางด้วยหัวลูกศรและแทนขนาดด้วยความยาวของส่วนของเส้นตรง

ขั้นตอนการสร้างเวกเตอร์

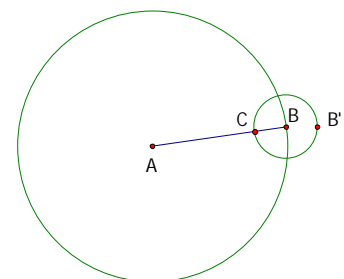
1. สร้างตัวเลื่อน (Slider) 1 เส้น สำหรับการควบคุมขนาดของเวกเตอร์

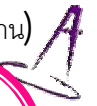


2. สร้างจุดอิสระ 1 จุด (จุด A) เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์
3. เลือกจุด A และตัวเลื่อน (ส่วนของเส้นตรง PQ) แล้วสร้างวงกลม
4. สร้างจุดบนส่วนของวงกลม 1 จุด (จุด B) เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ สามารถเคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลม
5. สร้างส่วนของเส้นตรง AB เป็นขนาดของเวกเตอร์ AB

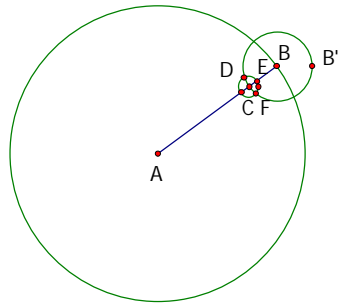


6. ที่จุด B สร้างหัวลูกศร แสดงทิศทางของเวกเตอร์
 - เลือกจุด B แล้วเลื่อนขนาน จุด B ไป 0.7 เซนติเมตร ในทิศศูนย์กลาง
7. เลือกจุด B (เป็นจุดศูนย์กลาง) และเลือกจุดที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด B แล้วสร้างวงกลม
8. สร้างจุดตัดระหว่างส่วนของเส้นตรง AB และเส้นรอบวงของวงกลมได้จุด C

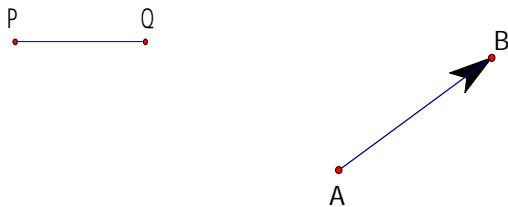




9. เลือกจุด C เลื่อนขนานจุด C เป็นระยะ 0.2 เซนติเมตร มุมศูนย์องศา
10. เลือกจุด C และจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด C สร้างวงกลม
11. สร้างจุดตัดระหว่างวงกลมเดิมกับวงกลมใหม่ และจุดตัดระหว่างวงกลมใหม่ กับส่วนของเส้นตรง AB ได้จุด D, E และ F ดังแสดงในรูป

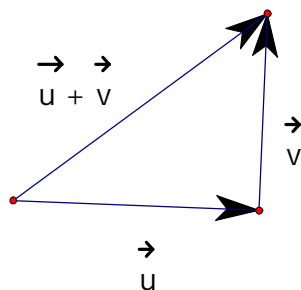


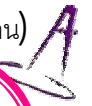
12. เลือกจุด DEF และ B ตามลำดับ สร้างภายในรูปสี่เหลี่ยม
13. ซ่อนจุดและเส้นรอบวงที่ไม่ต้องการแสดง จะได้เวกเตอร์ตามต้องการ



การบวกเวกเตอร์

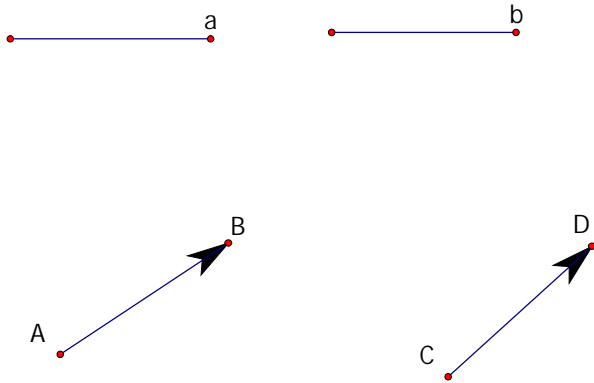
\vec{u} \vec{v} $\vec{u+v}$
 นิยาม ให้ U และ V เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน V ให้จุดเริ่มต้นของ V อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ U ผลบวกของ U และ V เขียนแทนด้วย " $U + V$ " คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ U และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ V





ขั้นตอนการสร้างสื่อการสอนเรื่องการบวกเวกเตอร์

- สร้างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ คือ เวกเตอร์ AB และ CD โดยมี a, b เป็นตัวเล็งเพื่อกำหนดขนาดเวกเตอร์

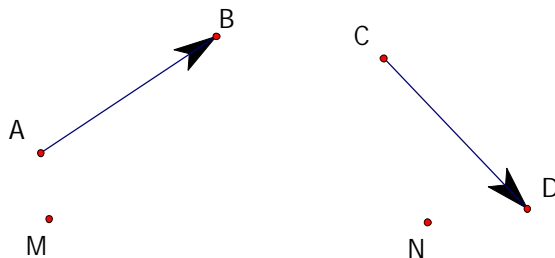


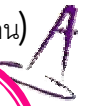
- สร้างจุดอิสระ 2 จุด คือ จุด M และ N สำหรับเป็นตำแหน่งที่อยู่ของ เวกเตอร์ AB และเวกเตอร์ CD
- สร้างปุ่มเคลื่อนที่สำหรับเคลื่อนเวกเตอร์ AB และ CD กลับที่อยู่โดยเลือกจุด A, M, C และ N ตามลำดับ แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน เคลื่อนที่ ที่หน้าต่างโต้ตอบ เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่เป็นชั่วคราว (ทดสอบการทำงานของปุ่ม) ตั้งชื่อป้ายเป็นกลับ
- สร้างปุ่มเคลื่อนที่ $C \rightarrow B$ โดยเลือกจุด C และ B ตามลำดับ (ในกรณีทีเวกเตอร์ AB และ CD อยู่ที่ตำแหน่ง M และ N ต้องใช้เมาส์ลากเวกเตอร์ทั้งสองออกจากตำแหน่ง M และ N ก่อน) แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน เคลื่อนที่ ที่หน้าต่างโต้ตอบ เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่เป็นเร็วหรือปานกลาง (ทดสอบการทำงานของปุ่ม)

กลับ



$C \rightarrow A$



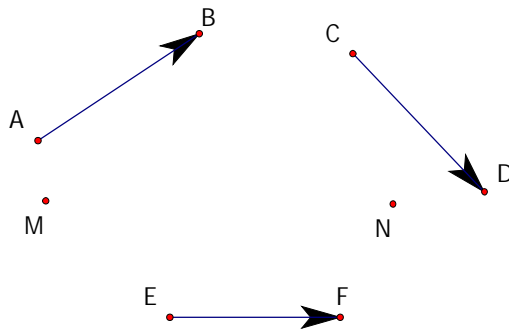


5. สร้างเวกเตอร์ลัพธ์ โดยกำหนดจุดอิสระ 2 จุด แล้วสร้างเวกเตอร์เป็นเวกเตอร์ EF

กลับ



C → A



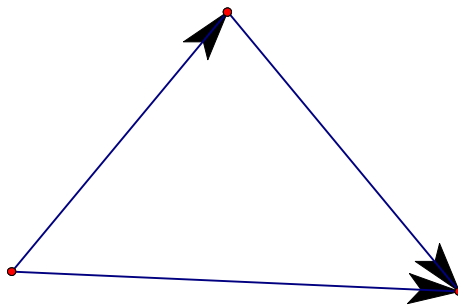
6. สร้างปุ่มการเคลื่อนที่ $F \rightarrow D$ เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่แบบปานกลางหรือเร็ว
7. สร้างปุ่มการเคลื่อนที่ $E \rightarrow A$ และ $F \rightarrow A$ เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่แบบชั่วขณะ เลือกปุ่มทั้งสองแล้วไปที่เมนูแก้ไข คำสั่งปุ่มแสดงการทำงานเลือกการนำเสนอที่หน้าต่างโต้ตอบเลือกทำงานพร้อมกัน แล้วตั้งชื่อป้ายเป็นกลับจุด A
8. สร้างปุ่มการนำเสนอ 2 ปุ่ม ดังนี้

ปุ่มที่ 1 กลับไปเริ่มต้น มีขั้นตอนดังนี้

- เลือกปุ่มกลับ (ในข้อ 3) และปุ่มกลับจุด A (ในข้อ 7) แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงานการนำเสนอ
- ที่หน้าต่างโต้ตอบเลือก การทำงานพร้อมกัน แล้วตั้งชื่อป้าย กลับไปเริ่มต้น

ปุ่มที่ 2 เวกเตอร์ $AB + CD$ มีขั้นตอนดังนี้

- เลือกปุ่มเคลื่อนที่ $C \rightarrow B$ (ในข้อ 4) และปุ่ม $F \rightarrow D$ ในข้อ 8 แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน การนำเสนอ ที่หน้าต่างโต้ตอบเลือกการทำงานตามลำดับ แล้วตั้งชื่อป้ายว่าเวกเตอร์ $AB + CD$



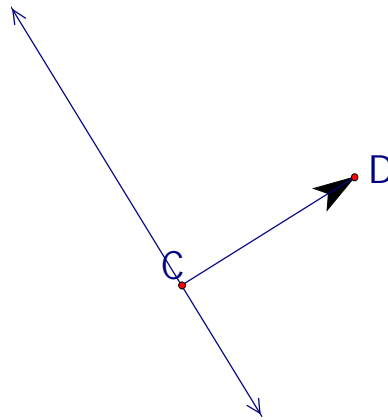
การลบเวกเตอร์

บทนิยาม นิเสธของ \vec{u} (negative of \vec{u}) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ \vec{u}
 แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ \vec{u} แทนด้วย $-\vec{u}$

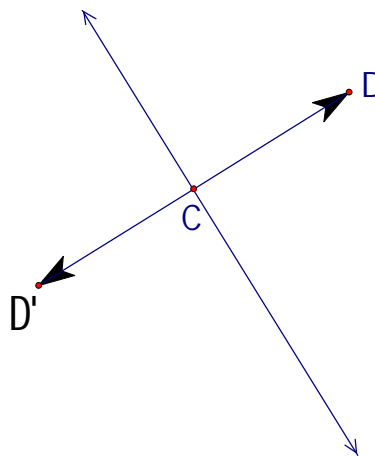
บทนิยาม ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบของ \vec{u} ด้วย \vec{v} หมายถึง ผลบวกของ \vec{u} และนิเสธของ \vec{v} เขียนแทนด้วย $\vec{u} - \vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

การสร้างนิเสธของ \vec{u}

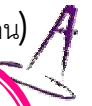
- สร้างเวกเตอร์ $\vec{1}$ เวกเตอร์ เป็นเวกเตอร์ \vec{CD}
- ที่จุด C สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง CD



- เลือกเส้นตั้งฉากเป็นเส้นสะท้อน
- สะท้อนเวกเตอร์ \vec{CD} ได้นิเสธของเวกเตอร์ \vec{CD}



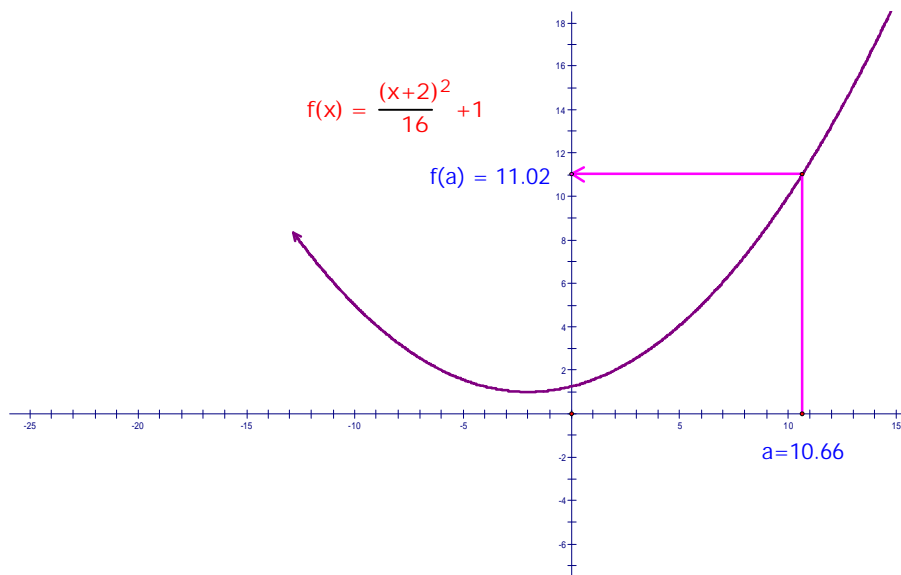
การสร้างสื่อการสอนเรื่องลบเวกเตอร์ เช่น เวกเตอร์ \vec{AB} ลบด้วยเวกเตอร์ \vec{CD} ทำเหมือนกับกรบวกเวกเตอร์
 นั่นคือ เวกเตอร์ \vec{AB} บวกด้วยนิเสธของเวกเตอร์ \vec{CD} แต่ต้องเพิ่มปุ่มการซ่อน/แสดงเวกเตอร์ \vec{AB} กับนิเสธของเวกเตอร์
 \vec{AB} เพื่อใช้ในการสร้างปุ่มการนำเสนอ



การสร้างสื่อเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

ในการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เราสามารถสร้างสื่อง่ายๆ เพื่อให้นักเรียนเห็นภาพ ของค่า X ที่เข้าใกล้ a และค่าลิมิตของฟังก์ชัน ได้ชัดเจนขึ้นโดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

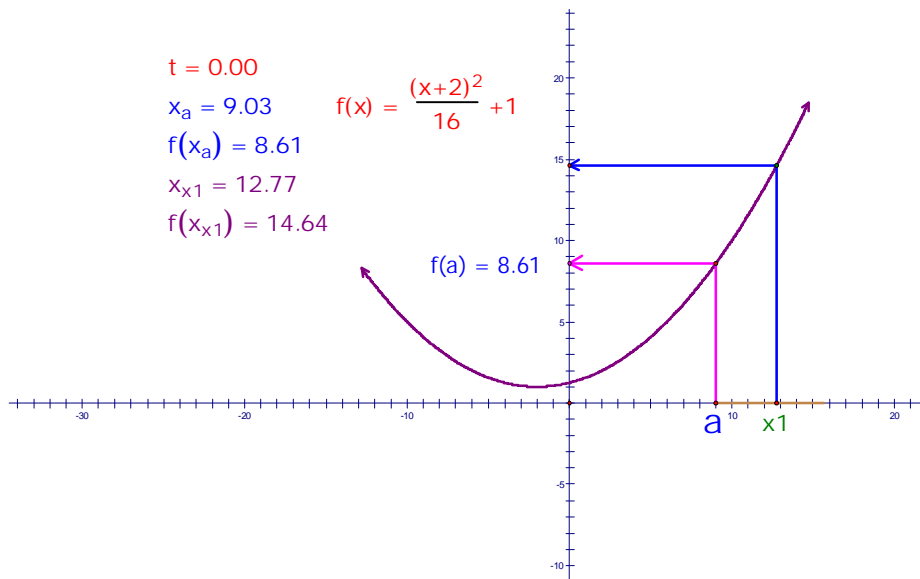
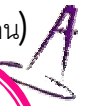
1. จากเมนูกราฟ กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x+2)^2}{16} + 1$ และวาดกราฟของฟังก์ชันนี้
2. ใช้คำสั่งจุดเพื่อสร้างจุดอิสระ 1 จุดบนแกน X ให้ชื่อว่า "a" จากเมนูวัดหาพิกัดที่หนึ่ง (x) ของ a จะให้ X_a
3. จากเมนูวัด คำสั่งคำนวณ หาค่า $f(x)$ แล้วเลือก X_a และ $f(X_a)$ ตามลำดับ จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y)
4. จากเมนูกราฟใช้คำสั่งพารามิเตอร์ใหม่ สร้างพารามิเตอร์ $t=0$
5. เลือก $t=0$ และ $f(X_a)$ ตามลำดับ แล้วไปที่เมนูกราฟ ใช้คำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จะได้จุด $(0, f(X_a))$ บนแกน y
6. จากเมนูสร้าง ใช้คำสั่งส่วนของเส้นตรง สร้างเส้นตรงเชื่อมจุดที่ลงไว้ จะได้ภาพดังนี้



เมื่อเลื่อน a ไปบนแกน X จะได้ค่า $f(a)$ บนแกน y

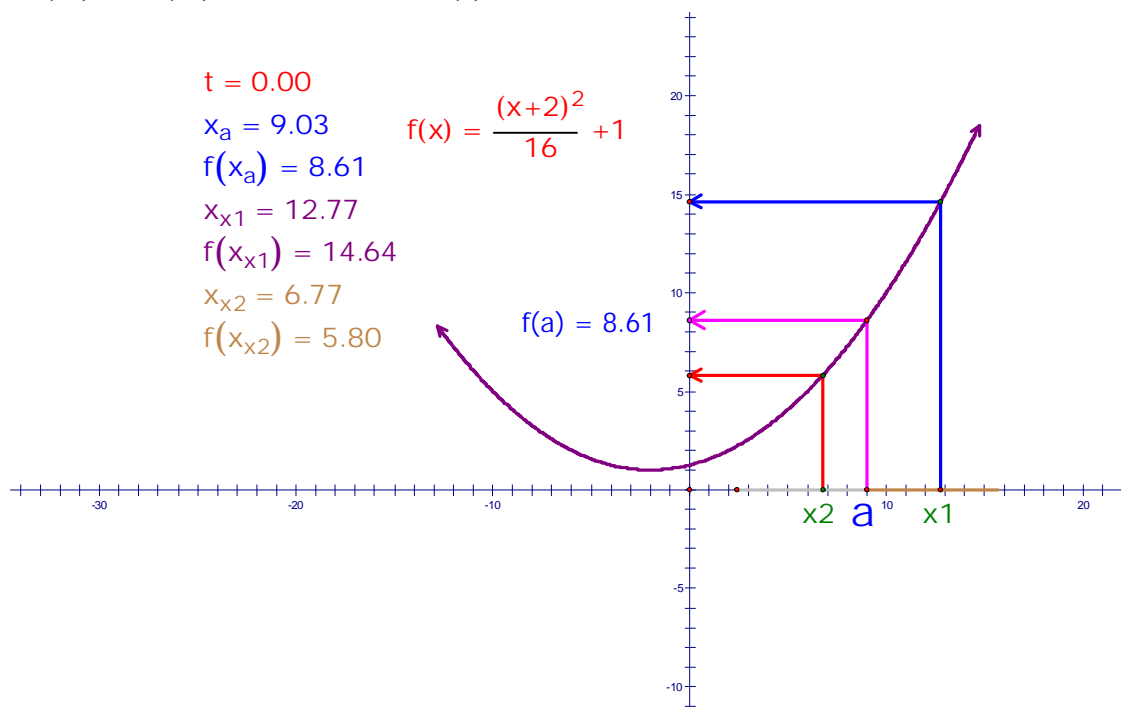
7. เลือกจุด a และจากเมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนานแบบเชิงขั้ว ระยะคงที่ 3 ซม. และมุมคงที่ 0 องศา จะได้จุดทางขวาของ a ห่างจาก a 3 หน่วย และจากเมนูสร้างเลือกคำสั่งส่วนของเส้นตรง เพื่อสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อม 2 จุดนี้
8. ใช้คำสั่งจุดสร้างจุดอิสระ 1 จุด บนส่วนของเส้นตรงในข้อ 7 ให้ชื่อว่า X_1 จุดนี้จะเคลื่อนที่บนส่วนของเส้นตรงที่สร้างขึ้นเท่านั้นและจากเมนูวัด หาพิกัดที่หนึ่งของ X_1 จะได้ค่า X_{X_1}
9. จากเมนูวัด ใช้คำสั่งคำนวณ เลือกฟังก์ชัน f และเลือก X_{X_1} จะได้ค่า $f(X_{X_1})$
10. เลือก X_{X_1} และ $f(X_{X_1})$ ไปที่เมนูกราฟ ใช้คำสั่งลงจุดแบบ (x,y)
11. เลือก $t=0$ และ $f(X_{X_1})$ ไปที่เมนูกราฟ ใช้คำสั่งลงจุดแบบ (x,y)
12. จากเมนูสร้างใช้คำสั่ง ส่วนของเส้นตรง สร้างเส้นตรงเชื่อมจุดที่ลงไว้ จะได้ภาพดังนี้





เมื่อเลื่อนจุด x_1 เข้าใกล้ a ภาพดังกล่าวจะแสดงค่าของ $f(x_1)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะเห็นว่า $f(x_1)$ เข้าใกล้ $f(a)$

13. ในทำนองเดียวกัน เราสามารถสร้างจุด x_2 ทางซ้ายของจุด a อยู่บนส่วนของเส้นตรง ระยะห่างจากจุด a 3 ซม. ได้เช่นเดียวกัน (ทำนองเดียวกับข้อ 7 ถึง 12)
14. หลังจากสร้างภาพแสดงค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ เสร็จแล้ว ให้เลือกจุด x_1 และ a ตามลำดับ จากเมนูแก้ไข ใช้คำสั่ง ปุ่มแสดงการทำงาน และเลือกคำสั่งการเคลื่อนที่ จะได้ป้ายการเคลื่อนที่ $x_1 \rightarrow a$
15. เลือกจุด x_2 และ a ตามลำดับ จากเมนูแก้ไข ใช้คำสั่ง ปุ่มแสดงการทำงาน และเลือกคำสั่งการเคลื่อนที่ จะได้ป้ายการเคลื่อนที่ $x_2 \rightarrow a$
16. กดปุ่มในข้อ 14 และข้อ 15 จะได้ภาพการเคลื่อนที่ของ x เข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวาของ a ซึ่งจะเห็นภาพของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ ต่างก็เข้าไปหาค่า $f(a)$ ได้เช่นเดียวกัน



17. ในกรณีที่ฟังก์ชัน ที่กำหนดให้ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=a$ สามารถสร้างสื่อแสดงลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายและทางขวาได้ในหลักการเดียวกัน





การสร้างสื่อสำหรับการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน

การศึกษาเรื่องลิมิตเป็นสิ่งสำคัญมากสำหรับวิชาแคลคูลัสเราจะพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริง และศึกษานิยามของลิมิตโดยละเอียดดังนี้

เราจะนิยามว่า f มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a

(ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$)

ก็คือเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง $\epsilon > 0$ ที่กำหนดให้

จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \epsilon$ สำหรับทุก x ซึ่ง $0 < |x - a| < \delta$

เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจถึงจำนวนจริง ϵ และ δ ที่มีบทบาทมากสำหรับนิยามของลิมิต เราทำให้ง่าย ๆ ดังนี้ จากบทนิยาม

เมื่อเรากล่าวว่ $|f(x) - L| < \epsilon$ (ทุก $\epsilon > 0$)

เราจะได้ว่า $-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$

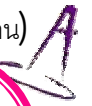
หรือ $L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$

หรือพูดง่าย ๆ ว่า $f(x)$ มีค่าใกล้ L

เราสามารถสร้างสื่อให้เห็นภาพได้ว่าถ้าเราสามารถบีบช่วง $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ ให้เล็กมากเท่าใดก็ได้ โดยใช้ ϵ เป็นตัวกำหนด และเมื่อ $f(x)$ ตกในช่วง $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ แสดงว่า $f(x)$ กับ L มีค่าห่างกันไม่เกิน ϵ โดยทำดังนี้

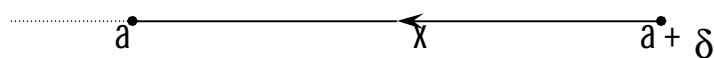
- 1) กำหนด L บนแกน y เลื่อนขนาน L ไป 1 หน่วยในแนวแกน Y ซึ่งตั้งฉากกับแกน X (ใช้คำสั่งเลื่อนขนาน 1 หน่วย 90 องศา)
- 2) ลากเส้นตรงผ่าน จุด 2 จุดนั้น
- 3) สร้างตัวเลื่อน (slider) ϵ ความยาวพอสมควร
- 4) ใช้ L เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมรัศมี ϵ หาจุดตัดเส้นตรงกับวงกลม ตั้งชื่อว่า $L + \epsilon$ และ $L - \epsilon$ ตามลำดับ



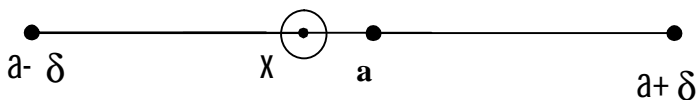


- 5) สร้างเส้นเชื่อมจุด $L - \epsilon$ และ $L + \epsilon$ จะมี L เป็นจุดกึ่งกลางช่วง
 - 6) ลองเลื่อนความยาว slider ϵ จะเห็นช่วง $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ เปลี่ยนไปด้วย
- ต่อไปเราจะสร้างสื่อเพื่อสร้างความเข้าใจเกี่ยวกับค่า δ เมื่อเราต้องการแสดงให้เห็นภาพที่ $x \in a$ เราทำสื่อดังนี้
- 1) ใช้เครื่องมือจุด กำหนดจุด a บนแกน X เลื่อนขนาน a ไปในแนวนอนทางซ้ายมือ 1 หน่วย ลากเส้นตรงผ่านจุด a และจุดที่เกิดใหม่
 - 2) กำหนดค่า δ โดยวิธีสร้าง slider δ ความยาวพอสมควร
 - 3) ใช้ a เป็นศูนย์กลางรัศมี δ สร้างวงกลม หาจุดตัดของวงกลม กับเส้นตรงที่ผ่านจุด a ได้จุด 2 จุด
 - 4) เลือกจุดทางซ้ายของ a ให้ชื่อจุดนั้นว่า $a - \delta$
 - 5) ซ้อนเส้นตรงที่ผ่านจุด a แล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด $a - \delta$ กับจุด a
 - 6) สร้างจุด 1 จุดบนส่วนของเส้นตรงนั้นให้ชื่อว่า X
 X สามารถเคลื่อนที่ไปมาได้บนส่วนของเส้นตรง
 - 7) สร้างหัวลูกศรตามใจชอบให้มีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด a
 - 8) ทำปุ่มเคลื่อนที่ X โดยให้เคลื่อนที่เริ่มจากจุด $a - \delta$ ไปยังจุด a

ในการทำงานเดียวกัน ถ้าเราต้องการแสดงให้เห็นภาพที่ $x \in a^+$ เราก็สามารถสร้างได้โดยกระทำเช่นเดียวกัน ตั้งแต่ข้อ 1) ถึง 4) โดยในข้อที่ 4) ให้เลือกจุดตัดทางด้านขวามือ ของ a และให้ชื่อจุดนั้นว่า $a + \delta$



หลังจากนั้นเมื่อรวมภาพ $x \in a$ และ $x \in a^+$ ก็จะได้ภาพของ $x \in a$ (หมายถึงเข้าใกล้ a ทั้งสองทางซ้ายและขวา) ดังภาพ



นั่นคือ X สามารถ เคลื่อนไหวได้บนช่วง $(a - \delta, a + \delta)$ และเมื่อเรากล่าวว่า $0 < |x - a| < \delta$ จะหมายความว่า $a - \delta < x < a + \delta$ และ $x \neq a$





การสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด ที่กำหนดให้

การสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P ที่กำหนดให้มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนดพารามิเตอร์ใหม่ a, b, c, d จากเมนูกราฟใช้คำสั่งฟังก์ชันใหม่ สร้างฟังก์ชัน $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2. จากเมนูกราฟ วาดกราฟฟังก์ชัน $f(x)$
3. กำหนดจุด P บนกราฟของฟังก์ชัน f และจากเมนูวัด หาพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด P และหาพิกัดที่สอง (y) ของจุด P จะได้ค่า x_p และ y_p
4. เลือกฟังก์ชัน $f(x)$ และจากเมนูกราฟใช้คำสั่งอนุพันธ์จะได้

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

5. จากเมนูวัดเลือกคำสั่งคำนวณ แล้วเลือก $f'(x)$ และ x_p ตามลำดับจะได้

$$f'(x_p) = m$$

6. เราต้องการสร้างเส้นสัมผัส L ที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_p, y_p) ซึ่งมีสมการ $y = m(x - x_p) + y_p$ เมื่อ $m = f'(x_p)$ เราจะสร้างฟังก์ชันเส้นตรง L นี้ได้โดย จากเมนูกราฟ ใช้คำสั่งฟังก์ชันใหม่โดยใช้ชื่อ $g(x)$

$$g(x) = m(x - x_p) + y_p$$

7. จากเมนูกราฟ ใช้คำสั่ง วาดกราฟฟังก์ชันใหม่ จะได้กราฟของเส้นตรง ซึ่งผ่านจุด P และ สัมผัสกราฟของ f ที่จุด P
8. เลื่อนจุด P ไปบนส่วนโค้งของฟังก์ชัน f จะพบว่า เส้นสัมผัสเปลี่ยนแปลงไปตามจุด P
9. กำหนดจุด Q บนกราฟของ $f(x)$ แล้วสร้างเส้นตรงผ่านจุด P และ จุด Q จากเมนูสร้าง ใช้เครื่องมือลูกศร เคลื่อนที่ Q ให้เข้าใกล้ P แล้วสังเกตเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด Q จะพบว่าเมื่อ Q เคลื่อนที่เข้าใกล้ P เส้นตรง PQ จะเคลื่อนเข้าใกล้เส้นสัมผัส L ดังนั้น ความชันของเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส L

$$\text{ความชันของเส้นตรง } PQ = \frac{f(x_Q) - f(x_p)}{x_Q - x_p}$$

ถ้าเราให้ $h = x_Q - x_p$ เมื่อ $Q \rightarrow P$ จะได้ $x_Q \rightarrow x_p$ และทำให้ $h \rightarrow 0$

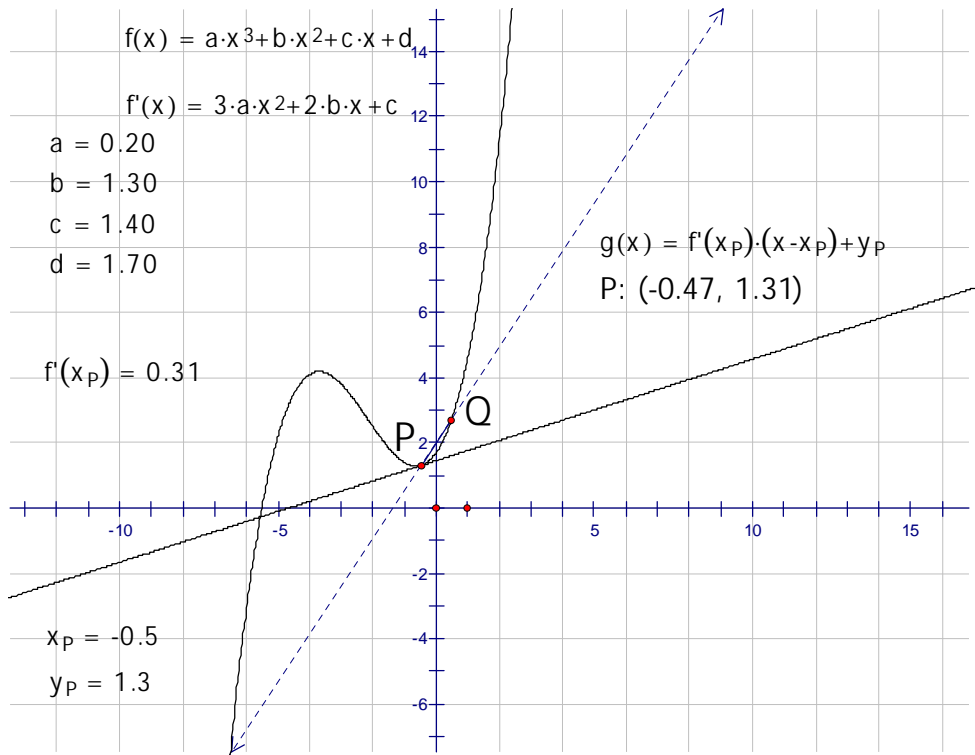
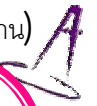
ดังนั้น เมื่อ $Q \rightarrow P$ แสดงว่า $h \rightarrow 0$

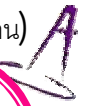
นั่นคือ เมื่อเราพิจารณา ความชันของเส้นตรง PQ เมื่อ $Q \rightarrow P$ จะเห็นว่า ความชันของเส้นตรง PQ มีค่าเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P ซึ่งทำให้เราพอจะสังเกตเห็นได้ว่า

$$\lim_{x_Q \rightarrow x_p} \frac{f(x_Q) - f(x_p)}{x_Q - x_p} \quad \text{หรือ} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h}$$

เป็นค่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P



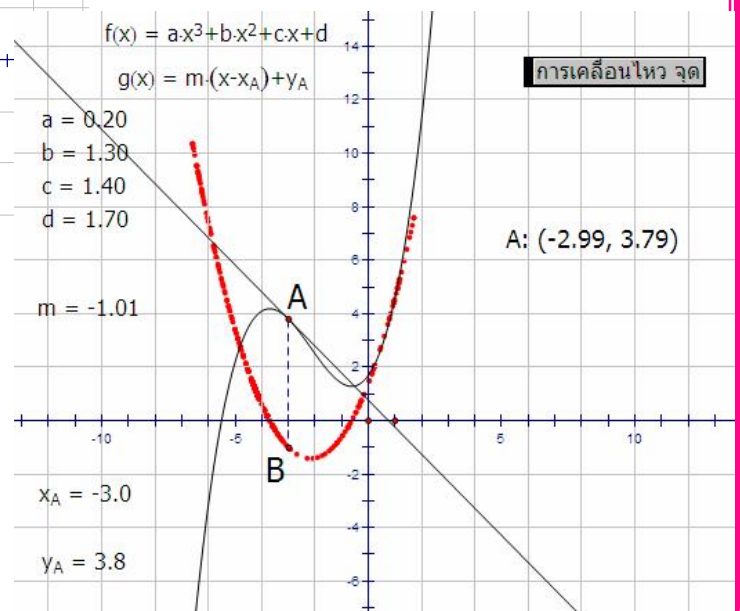
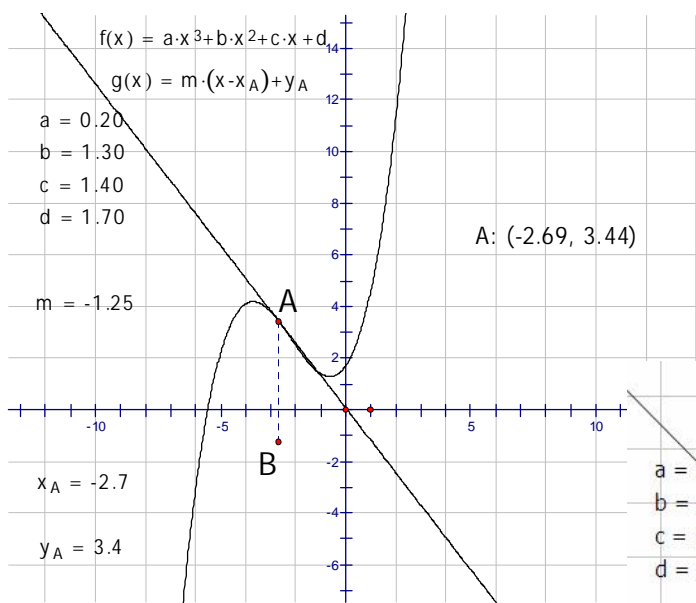




การสร้างกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

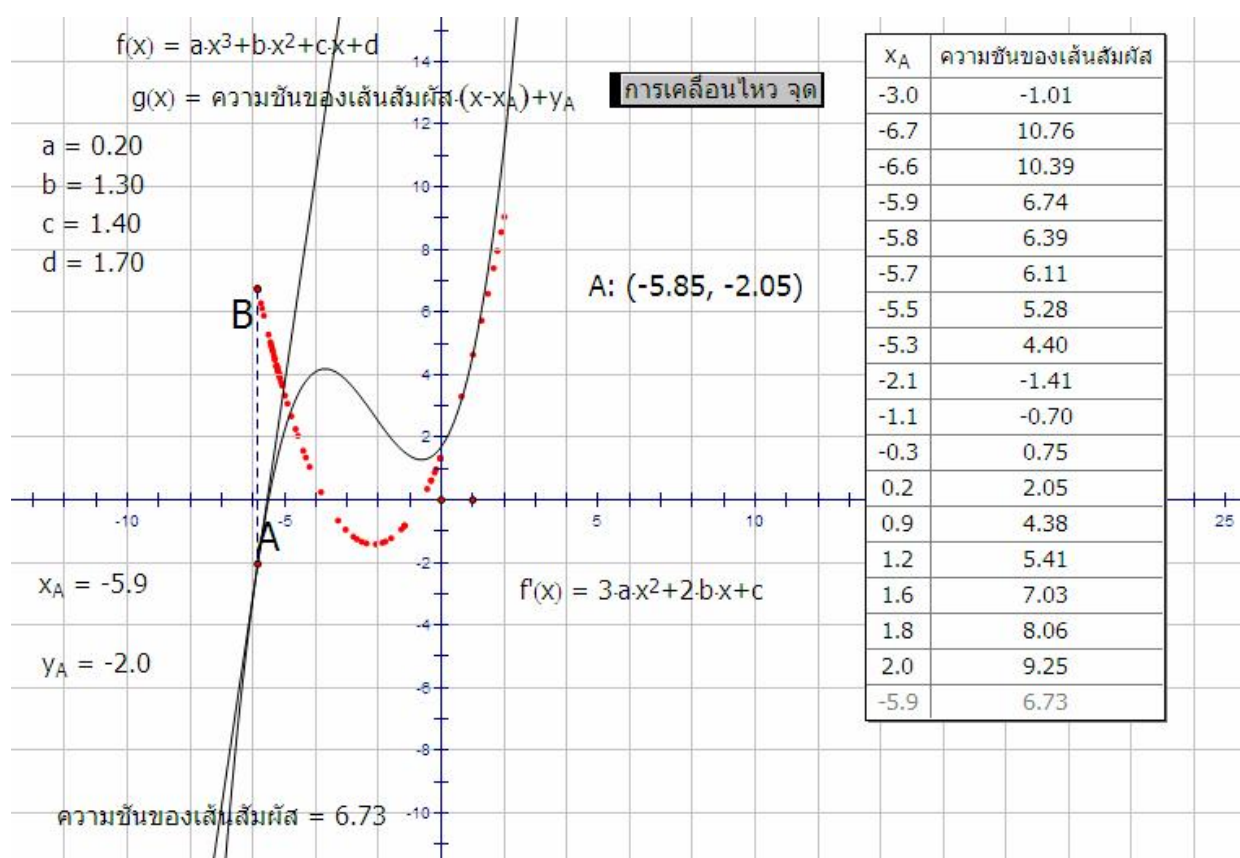
การเขียนกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ในที่นี้จะเขียนโดยอาศัยความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุดต่าง ๆ บนกราฟของฟังก์ชัน f มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนด พารามิเตอร์ a, b, c และ d จากเมนูกราฟ วาดกราฟฟังก์ชันใหม่ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
2. กำหนดจุด A บนกราฟของฟังก์ชัน f ใช้เมนูวัดหาพิกัดที่หนึ่ง(X_A)
3. สร้างกราฟของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด A (ดูวิธีสร้างจากหัวข้อการสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง)
4. เลือกกราฟเส้นสัมผัสจากเมนูวัดใช้คำสั่งความชันหาค่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุด A เปลี่ยนป้าย ความชันของเส้นสัมผัสที่ A เป็น m
5. เลือก X_A และ m ตามลำดับ ใช้เมนูกราฟลงจุดแบบ (x, y) ให้ชื่อจุดดังกล่าวว่า B
6. สร้างปุ่มแสดงการทำงานของกราฟการเคลื่อนไหวของจุด A โดยคลิกเลือกจุด A จากเมนูแก้ไขใช้คำสั่งปุ่มแสดงการทำงานของกราฟ เลือกการเคลื่อนไหว
7. เลือก B และจากเมนู แสดงผลใช้คำสั่งสร้างรอยจุด(เราจะให้มีรอยการเคลื่อนที่ของ B)
8. กดปุ่มการเคลื่อนไหวของจุด A สั่งให้ A เคลื่อนไหวจะทำให้ทั้งจุด A และ B เคลื่อนไหว สังเกตรอยจุด ที่เกิดขึ้น รอยดังกล่าวจะเป็นกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f นั้น





9. เราจะสร้างตารางแสดงพิกัดที่หนึ่งของจุด A และค่าความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งแล้วนำมาลงจุดแบบ (x,y) เพื่อให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างจุด A และจุด B และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A รวมทั้งความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A ดังนี้
 - เลือก X_A และ m ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด A ตามลำดับและจาก เมฆกราฟใช้คำสั่งตาราง
10. ดับเบิลคลิกที่ตารางเพื่อเพิ่มข้อมูลในตาราง ใช้เมนูลูกศร เพื่อเคลื่อนที่ จุด A ไปเล็กน้อย ข้อมูลในตารางจะเปลี่ยนไป เพิ่มข้อมูลในตารางที่แตกต่างกันประมาณ 20 ข้อมูล
11. เลือกตารางและจากเมฆกราฟ เลือกคำสั่ง ลงข้อมูลในตารางจะได้จุดต่าง ๆ จากตารางบนหน้าจอ
12. จากเมนูแสดงผลเลือกคำสั่งลบบรรยากาศ(เพื่อลบบรรยากาศของจุด B ที่เกิดขึ้นก่อนหน้า)
13. เลือกจุด A และ B และจากเมนูสร้างใช้คำสั่งสร้างส่วนของเส้นตรง(เลือกใช้เส้นประ) เราจะได้เส้นเชื่อมจุด A และจุด B
14. ลองเคลื่อนจุด A ไปบนกราฟของฟังก์ชัน f แล้วสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจุด A และจุด B และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A รวมทั้งความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A ขณะนั้นด้วย



การสร้างกราฟของอสมการ

กำหนดการเชิงเส้น (Linear programming) สามารถใช้ช่วยในการตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด เพื่อให้ได้ประโยชน์สูงสุดแก่ผู้ตัดสินใจ วิธีการนี้ใช้ประยุกต์ในหลายด้าน เช่น ต้องการให้ได้กำไรสูงสุดภายใต้ต้นทุนจำกัด ต้องการเสียเงินในการซื้ออาหารน้อยที่สุด แต่ให้ได้รับสารอาหารมากที่สุด เป็นต้น การแก้ปัญหาจึงสามารถแสดงทำได้โดยใช้สมการและระบบอสมการเชิงเส้นหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งใช้เทคนิคการหาสมการจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัด แล้วนำมาเขียนกราฟของอสมการแต่ละอสมการ คำตอบจะอยู่ที่บริเวณที่ซ้ำกันของกราฟ

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างเกี่ยวกับปัญหาที่ใช้กำหนดการเชิงเส้นพร้อมทั้งวิธีหาคำตอบจากกราฟ

ตัวอย่าง อุตสาหกรรมครัวเรือนแห่งหนึ่งผลิตนมเย็นและไอศกรีมทุกวัน สมมุติว่านมเย็นแต่ละลิตรต้องใช้ไขมัน 0.4 ลิตรและครีม 0.2 ลิตร ส่วนไอศกรีมแต่ละลิตรต้องใช้ไขมัน 0.2 ลิตร และใช้ครีม 0.4 ลิตร จากส่วนผสมดังกล่าวปรากฏว่าขายนมเย็นได้กำไรลิตรละ 8 บาท ส่วนไอศกรีมได้กำไรลิตรละ 10 บาท ถ้าในแต่ละวันอุตสาหกรรมนี้มีนม 10 ลิตร และครีม 14 ลิตร เขาควรจะผลิตนมเย็นและไอศกรีมอย่างละเท่าใด จึงจะได้ผลกำไรมากที่สุดต่อวัน

วิธีทำ

ให้ x เป็นจำนวนลิตรของนมเย็นที่ผลิต

y เป็นจำนวนลิตรของไอศกรีมที่ผลิต

Z เป็นผลกำไรทั้งหมด

สมการจุดประสงค์คือ $Z = 8x + 10y$

$$0.4x + 0.2y \leq 10$$

$$0.2x + 0.4y \leq 14$$

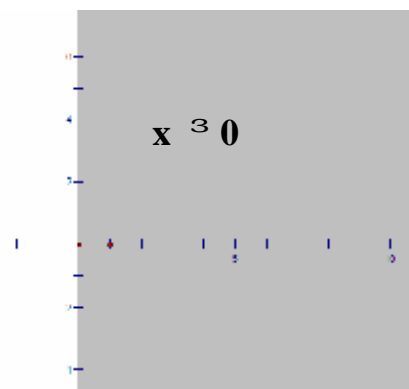
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัด แต่ละอสมการดังนี้

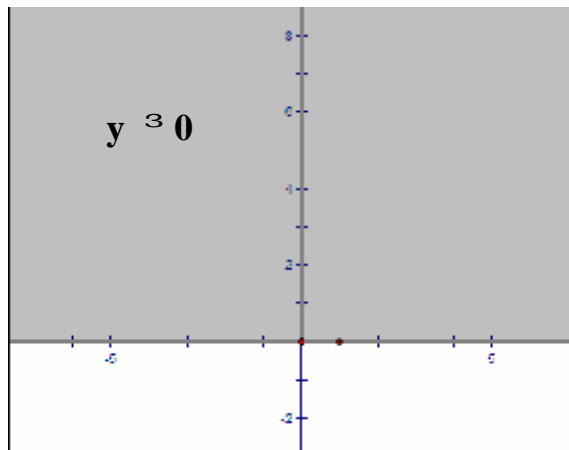
การเขียนกราฟของอสมการ $x \geq 0$

1. จากเมนูกราฟกำหนดระบบพิกัด และซ่อนกริด
2. สร้างรังสีเพื่อแสดงค่า x ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 โดยเลือกที่จุดกำเนิด และจุดหนึ่งหน่วย ตามลำดับ สร้างรังสี
3. สร้างจุดบนรังสี แล้วเลือกที่จุดนั้นและเส้นรังสีเพื่อ สร้างเส้นตั้งฉาก
4. จากเมนูแสดงผล เลือกสร้างรอยเส้นตั้งฉาก
5. เมื่อเลื่อนเส้นตั้งฉาก จะได้อาณาบริเวณที่แรเงา ซึ่งแสดงให้เห็นกราฟของ $x \geq 0$



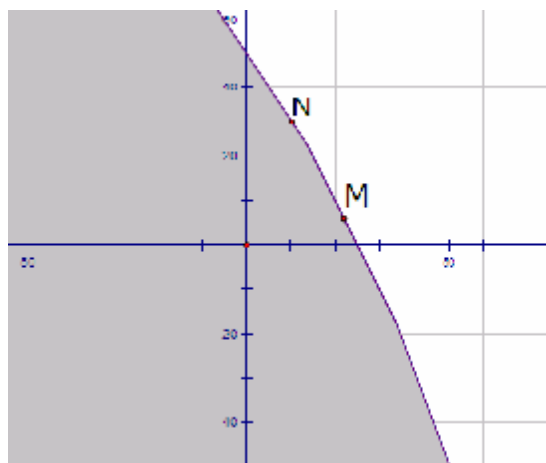
การเขียนกราฟของอสมการ $y \geq 0$

1. สร้างรังสีเพื่อแสดงค่า X_2 ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 โดยเลือกจุดมาวางบนแกน y ตั้งชื่อจุดเป็น B เลือกที่จุดกำเนิดและจุด B ตามลำดับ สร้างรังสี จากนั้นซ่อนจุด B
2. เลือกที่เส้นรังสี สร้างจุดบนรังสี แล้วเลือกที่จุดนั้นและเส้นรังสีเพื่อ สร้างเส้นตั้งฉาก
3. จากเมนูแสดงผล เลือกสร้างรอยเส้นตั้งฉาก เมื่อเลื่อนเส้นตั้งฉาก จะได้อาณาบริเวณที่แรเงาที่แสดงให้เห็นกราฟของ $y \geq 0$



การเขียนกราฟของอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$

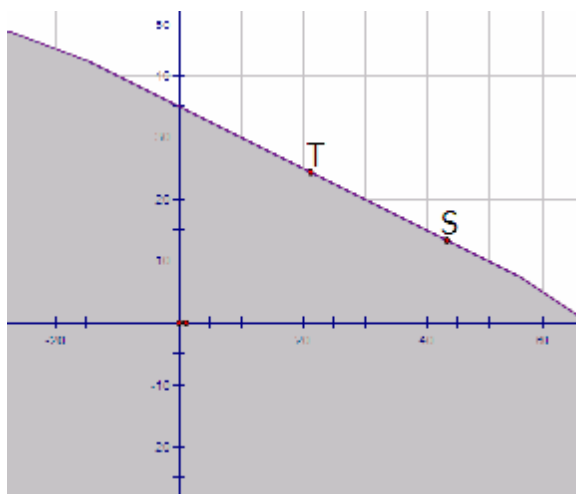
1. จากอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$ จะได้ $y \leq \frac{10 - 0.4x}{0.2}$
2. จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{10 - 0.4x}{0.2}$ แล้ววาดกราฟฟังก์ชันนี้
3. สร้างจุด M และ N บนกราฟของฟังก์ชัน เลือกที่เส้นกราฟของฟังก์ชันเพื่อซ่อนเส้นกราฟ จากนั้นเลือกที่จุด M และ N เพื่อสร้างเส้นตรงแทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน
4. เลือกที่จุด M และเส้นตรงที่แทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน สร้างเส้นตั้งฉาก
5. สร้างจุดบนเส้นตั้งฉาก โดยเลือกวางจุดให้อยู่เหนือเส้นกราฟ ตั้งชื่อจุดเป็นจุด P ซ่อนเส้นตั้งฉาก จากนั้นเลือกที่จุด M และจุด P ตามลำดับ สร้างรังสี ซ่อนจุด P
6. สร้างจุดบนรังสี ตั้งชื่อจุด O เลือกที่จุด O และเส้นตรงที่อยู่บนกราฟ สร้างเส้นขนาน จะได้เส้นขนานกับเส้นกราฟ ซ่อนเส้นรังสี
6. เลือกสร้างรอยบนเส้นขนานนี้ เมื่อเลื่อนขนานนี้จะได้อาณาบริเวณที่แรเงา ซึ่งจะแสดงกราฟของอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$





การเขียนกราฟของอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$

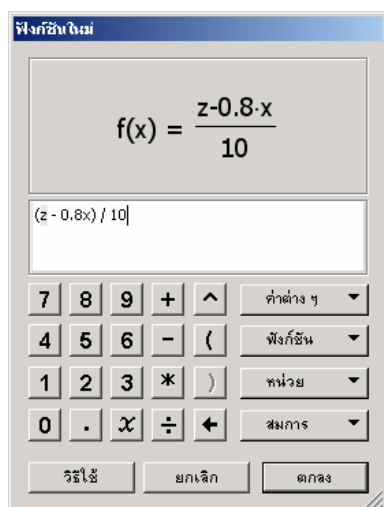
1. จากอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$ จะได้ $y \leq \frac{14 - 0.2x}{0.4}$
2. จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{14 - 0.2x}{0.4}$ แล้ววาดกราฟฟังก์ชันนี้
3. สร้างจุด S และ T บนกราฟของฟังก์ชัน เลือกที่เส้นกราฟของฟังก์ชันเพื่อซ่อนเส้นกราฟ จากนั้นเลือกที่จุด S และ T สร้างเส้นตรงแทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน
4. เลือกที่จุด S และเส้นตรงที่แทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน สร้างเส้นตั้งฉาก
5. สร้างจุดบนเส้นตั้งฉาก โดยเลือกวางจุดให้อยู่เหนือเส้นกราฟ ตั้งชื่อจุดเป็นจุด R ซ่อนเส้นตั้งฉาก จากนั้นเลือกที่จุด S และจุด R ตามลำดับ สร้างรังสี ซ่อนจุด R
6. สร้างจุดบนรังสี ตั้งชื่อจุด V เลือกที่จุด V และเส้นตรงที่อยู่บนกราฟ สร้างเส้นขนาน จะได้เส้นขนานกับเส้นกราฟ ซ่อนเส้นรังสี
6. เลือกสร้างรอยบนเส้นขนานนี้ เมื่อเลื่อนขนานนี้จะได้อาณาบริเวณที่แรเงา ซึ่งจะแสดงกราฟของอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$



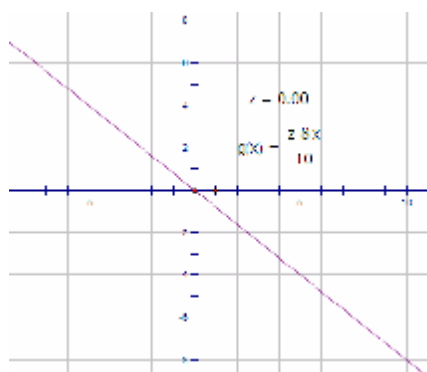
การเขียนกราฟของสมการจุดประสงค์ $Z = 8x + 10y$

1. จากสมการ $Z = 8x + 10y$ จะได้ $y = \frac{Z - 8x}{10}$
2. สร้างพารามิเตอร์ใหม่ จากเมนูกราฟ ตั้งชื่อ Z กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น 0
3. จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{Z - 8x}{10}$ ดังภาพ

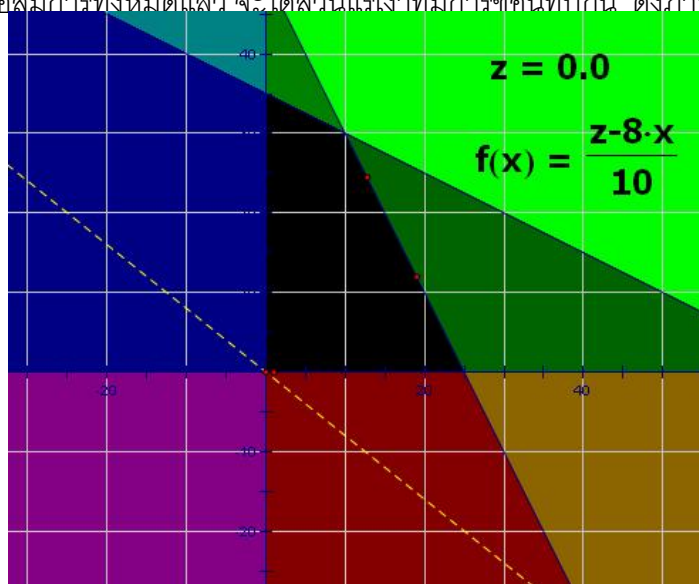




4. จากนั้นวาดกราฟฟังก์ชัน $y = \frac{z - 8x}{10}$ เมื่อ $z = 0$ จะได้ดังภาพ

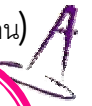


เมื่อสร้างกราฟของสมการทั้งหมดแล้ว จะได้ส่วนแรเงาที่มีการซ้อนทับกัน ดังภาพ



เซตของจุดที่อยู่ในอาณาบริเวณที่แรเงาซ้อนทับกัน เป็นอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้ ซึ่งจุดทุกจุดในอาณาบริเวณนี้สอดคล้องข้อสมการข้อจำกัดทั้งหมด และมีจุดมุมที่ใช้พิจารณาหาค่าต่ำสุดของสมการจุดประสงค์ เมื่อเขียนกราฟของสมการจุดประสงค์บนระบบพิกัดเดียวกัน (ในรูปคือเส้นประ) แล้วเลื่อนกราฟนี้ไปแบบขนานจะไปพบที่จุดมุม ซึ่งที่จุดมุมนี้จะเป็นจุดที่จะใช้พิจารณาคำตอบได้





การสร้างสื่อการสอนเรื่อง เมทริกซ์

เราสามารถนำ GSP ช่วยในการสร้างสื่อการสอนคณิตศาสตร์ในการทำงานแบบซ้ำๆ เช่น เรื่องเมทริกซ์ เพื่อลดความจำเจ และใช้เวลาในการฝึกการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาให้มากขึ้น หากเป็นงานที่ครูมอบหมายให้นักเรียนสร้าง template ของการดำเนินการระหว่างเมทริกซ์ ก็จะช่วยให้ นักเรียนจำนิยามทฤษฎีหรือสมบัติได้ง่ายขึ้น เช่น การบวก ลบ หรือคูณ ระหว่างเมทริกซ์และการหา A^t , A^{-1} และ $\det A$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ เป็นต้น ทำให้นักเรียนมีเวลาในการศึกษา วิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้เมทริกซ์ช่วยแก้ระบบสมการมากขึ้น

วิธีสร้างวงเล็บ

1. กำหนดจุดอิสระใดๆ สมมติชื่อจุด A
2. สร้างส่วนบนของวงเล็บ ด้วยการเลื่อนขนาน
3. สร้างความสูงของวงเล็บ ด้วยการสร้างเส้นตั้งฉาก
4. กำหนดขนาดของความสูง ด้วยจุดอิสระใดๆ บนเส้นตั้งฉากนั้น สมมติชื่อจุด B
สร้างส่วนปิดของวงเล็บ
5. สร้างวงเล็บปิด
 - ต้องอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันกับวงเล็บเปิด
 - ความสูงต้องเท่ากัน

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีกำหนดเป็นเครื่องมือส่วนตัว

1. เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการ ตามลำดับ
2. ที่เครื่องมือกำหนดเอง .. > สร้างเครื่องมือใหม่ ตั้งชื่อ

วิธีเรียกใช้งานวงเล็บ

ที่เครื่องมือสร้างเอง

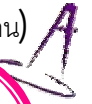
..> เลือกชื่อเครื่องมือที่เราตั้งชื่อไว้ นำไปวางในที่ๆ ต้องการ

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 \quad a_{12} = -1$$

$$a_{21} = 3 \quad a_{22} = 2$$





3. วิธีเปลี่ยนป้ายชื่อ ให้คลิกขวาที่พารามิเตอร์แต่ละค่า จะได้กล่องสมบัติของพารามิเตอร์
ลบ(delete) ชื่อออกจากป้าย จะได้

1 -1

3 2

ยกไปวางให้ตรงตำแหน่งที่ต้องการ

4. การคำนวณค่าในแต่ละคู่ของสมาชิก สามารถทำได้ด้วยคำสั่งคำนวณ จาก เมนูการวัด โดยอาศัยนิยาม สมบัติ
หรือ ทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์ เพื่อหาค่าของสมาชิกตัวใหม่ แล้วนำไปใส่ในเมทริกซ์ใหม่ที่เป็นผลลัพธ์



ภาคผนวก

คณะที่ปรึกษา

ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ดร. พิศาล สร้อยยธุหำ

รองผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ดร. นงนุช ชาญปริยวาทีวงศ์

ผู้เชี่ยวชาญพิเศษ สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

นายदनัย ยังคง

ผู้ช่วยผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ดร. พรพรรณ ไวทยางกูร

หัวหน้าโครงการส่งเสริมการใช้เทคโนโลยีสารสนเทศเพื่อการเรียนการสอน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ดร. สมศรี ตั้งมกคเลศ

คณะผู้จัดทำ

นายदनัย	ยั้งคง	ผู้เชี่ยวชาญพิเศษ	สสวท.
ผศ.เพ็ญพรพรรณ	ยั้งคง	คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย	
นางชัมย์พร	ตั้งตน	ผู้ชำนาญ สาขาคณิตศาสตร์มัธยมศึกษา	สสวท.
นายสมนึก	บุญพาไสว	ผู้ชำนาญ สาขาออกแบบและอุปกรณ์	สสวท.
นางกรรทอง	ตรีอาภรณ์	ผู้ชำนาญ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ	สสวท.
นางแจ่มจันทร์	ศรีอรุณรัศมี	นักวิชาการ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ	สสวท.
นายถนิม	ทิพย์ฝ่อง	นักวิชาการ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ	สสวท.
นายอลงกต	ใหม่ด้วง	นักวิชาการ สาขาเทคโนโลยีสารสนเทศ	สสวท.



เอกสารอ้างอิง

1. หนังสือเรียนคู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.สำนักพิมพ์คุรุสภา,2546.
2. หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.สำนักพิมพ์คุรุสภา,2547.
3. หนังสือเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ค013 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย .สำนักพิมพ์คุรุสภา,2542.
4. Cindy Clements, Ralph Pantossi, Scott Steketee. Exploring Calculus with The Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press, 2002.
5. Dan Bennett . Exploring Geometry with The Geometer's Sketchpad. Key curriculum press,2002.
6. Danial Scher, Scott Steketee, Pual Kunkel, Irina Lyublinskqya. Exploring Precalculus with The Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press, 2002.
7. Karen Windham Wyatt, Ann Lawrence, Gina M. Foletta. Geometry Activites for middle School students. Key curriculum press, 2002.
8. Reference Manual. The Geometer's Sketchpad. Key curriculum press. 2001.
9. Steven Chanan, Eric Bergofsley, Dan Bennett. Exploring Algebra with the geometer's Sketchpad . Key Curriculum Press,2002.
10. Teaching Mathematics with The Geometer's Sketchpad. Key curriculum press.2002.

