ข้อสอบบรรจุพนักงานของมหาวิทยาลัย ระดับปริญญาเอก

สาขาวิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์และศิลปศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลอีสาน นครราชสีมา

วันพุธที่ 18 มีนาคม พ.ศ. 2552 (เวลา 09.00–11.00 น)

<u>คำชี้แจง</u>

- ข้อสอบอัตนัยมีทั้งหมด 3 ข้อ 3 หน้า (รวม 100 คะแนน)
- ไม่อนุญาตให้ใช้เครื่องคำนวณใดๆ ในห้องสอบ
- ห้ามนำเอกสารใดๆ เข้าห้องสอบ
- ห้ามนำกระดาษข้อสอบออกนอกห้องสอบ

☺☺☺☺☺ ขอให้สนุก ขอให้สนุก ขอให้สนุก ☺☺☺☺☺

1. การแกว่งกวัดแบบบังคับ (Forced Oscillation) [40 คะแนน]

วัตถุขนาดเล็กมวล m ติดอยู่กับปลายสปริงเบาซึ่งมีค่าคงตัวของสปริงเป็น k แกว่งกวัดโดยมีแรงต้านอากาศแปรผันตามความเร็วของวัตถุซึ่งมีค่าคงตัวของแรงต้านอากาศเป็น b (แรงต้านอากาศ $F_{\mathrm{d}} = -bv$) และมีแรงภายนอกขึ้นอยู่กับเวลา $F_{\mathrm{ext}} = F_0 \sin \omega t$ มากระทำ (แรงภายนอกมีแอมพลิจูดเป็น F_0 และมีความถี่เชิงมุม ω) สมการการเคลื่อนที่ของการกระจัด $x(t)$ ของวัตถุจากตำแหน่งสมดุลคือ

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\sin \omega t} \tag{1.1}$$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

- จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการการเคลื่อนที่ (1.1)
- เมื่อเวลาผ่านไปนานมากๆ ($t \to \infty$) ความถี่เชิงมุม ω ของแรงภายนอกต้องมีค่าเท่ากับเท่าไรจึงจะทำให้การกระจัด $x(t)$ มีแอมพลิจูดสูงสุด และแอมพลิจูดที่สูงสุดของการกระจัดมีค่าเท่ากับเท่าไร

---

2. จุดวิกฤติของแก๊สฟันเดอร์วาลส์ (Critical Point of van der Waals Gas) [30 คะแนน]

สำหรับแก๊สฟันเดอร์วาลส์ที่อยู่ในภาชนะปริมาตร V มีความดัน P มีอุณหภูมิ T และมีจำนวน n โมล (หรือมีจำนวน N โมเลกุล) *สมการสถานะ* (equation of state) ของแก๊สฟันเดอร์วาลส์อยู่ในรูป

$$\boxed{\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT = Nk_{\mathrm{B}}T} \tag{2.1}$$

โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวขึ้นอยู่กับชนิดของแก๊ส *ค่าคงตัวของแก๊สต่อหนึ่งโมล* (molar gas constant) มีค่าเป็น

$$R = \left(8.314\,472 \pm 0.000\,015\right)\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}} \tag{2.2}$$

และ*ค่าคงตัวของโบลต์ซมันน์* (Boltzmann constant) มีค่าเป็น

$$k_{\mathrm{B}} = \left(1.380\,6504 \pm 0.000\,0024\right) \times 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}} \tag{2.3}$$

แก๊สฟันเดอร์วาลส์มี*จุดวิกฤติ* (critical point) ใน*แผนภาพ* PVT (PVT diagram) ที่จุด $\left(T_{\mathrm{c}}, V_{\mathrm{c}}, P_{\mathrm{c}}\right)$ โดยมีเงื่อนไขว่า

$$\boxed{\left.\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right|_{(T_c,V_c,P_c)} = 0 \quad \text{และ} \quad \left.\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T\right|_{(T_c,V_c,P_c)} = 0} \tag{2.4}$$

นั่นคือ ณ บริเวณใกล้ๆ จุดวิกฤติบนเส้น*ไอโซเทิร์ม* (isotherm) ที่อุณหภูมิคงตัว T_c ความดัน P *เกือบจะสม่ำเสมอ* (nearly uniform) มีค่าคงตัวไม่ขึ้นอยู่กับปริมาตร V จงตอบคำถามต่อไปนี้

- จงหาค่าปริมาตรวิกฤติ V_c , อุณหภูมิวิกฤติ T_c และความดันวิกฤติ P_c ในพจน์ของ a, b, n และ R
- ณ จุดวิกฤติของแก๊สฟันเดอร์วาลส์ จงแสดงว่า

$$\frac{P_c V_c}{nRT_c} = \frac{3}{8} \tag{2.5}$$

- จงแสดงว่าสมการสถานะฟันเดอร์วาลส์สามารถเขียนอยู่ในรูป*สมการสถานะเวอร์เรียล* (virial equation of state) สำหรับกรณีที่ $V > nb$ ได้ดังนี้

$$\frac{PV}{nRT} = 1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\left(\frac{n}{V}\right) + b^2\left(\frac{n}{V}\right)^2 + b^3\left(\frac{n}{V}\right)^3 + b^4\left(\frac{n}{V}\right)^4 + \cdots \tag{2.6}$$

---

3. ตัวแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกใน 1 มิติ (One-Dimensional Harmonic Oscillator) [30 คะแนน]

ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian operator) ของตัวแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกมวล m แกว่งกวัดด้วยความถี่เชิงมุม ω ใน 1 มิติ มีค่าเป็น

$$\boxed{\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2} \tag{3.1}$$

โดยที่*ตัวดำเนินการตำแหน่ง* (position operator) $\hat{x}$ และ*ตัวดำเนินการโมเมนตัม* (momentum operator) $\hat{p}$ สอดคล้อง*ความสัมพันธ์การสลับที่* (commutation relation)

$$[\hat{x},\hat{p}] \equiv \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = \mathrm{i}\hbar \tag{3.2}$$

นิยามตัวดำเนินการ

$$\boxed{\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right) \quad \text{และ} \quad \hat{a}^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right)} \tag{3.3}$$

โดยที่เมื่อตัวดำเนินการ $\hat{a}$ และ $\hat{a}^\dagger$ กระทำกับ*สถานะพื้น* (ground state) $\left|0\right\rangle$ และ*สถานะถูกกระตุ้นอันดับที่* n (n^{th} excited state) $\left|n\right\rangle$ ได้ผลเป็น

$$\boxed{\hat{a}\left|0\right\rangle = 0 \qquad \text{และ} \qquad \hat{a}\left|n\right\rangle = \sqrt{n}\left|n-1\right\rangle} \tag{3.4}$$

กับ

$$\boxed{\hat{a}^\dagger\left|0\right\rangle = \left|1\right\rangle \qquad \text{และ} \qquad \hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle = \sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle} \tag{3.5}$$

สำหรับ $n, n' \in \mathbb{Z}^+$ (จำนวนเต็มบวก) ค่า*ผลคูณภายใน* (inner product) ระหว่างสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n กับสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n' ใดๆ มีค่าเป็น

$$\left\langle n'\middle|n\right\rangle = \delta_{n',n} \equiv \begin{cases} 1 & ;\ n' = n \\ 0 & ;\ n' \neq n \end{cases} \tag{3.6}$$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

- ความสัมพันธ์การสลับที่ $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ มีค่าเท่ากับเท่าไร และจงแสดงว่า

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.7}$$

- จงหาค่าของ $\left\langle n\middle|\hat{x}\middle|n\right\rangle$, $\left\langle n\middle|\hat{p}\middle|n\right\rangle$, $\left\langle n\middle|\hat{x}^2\middle|n\right\rangle$, $\left\langle n\middle|\hat{p}^2\middle|n\right\rangle$ และ $\left\langle n\middle|\hat{H}\middle|n\right\rangle$ สำหรับสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ
- ในสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ กำหนดให้ $\Delta A \equiv \sqrt{\left\langle n\middle|\hat{A}^2\middle|n\right\rangle - \left\langle n\middle|\hat{A}\middle|n\right\rangle^2}$ สำหรับตัวดำเนินการ $\hat{A}$ ใดๆ จงหาค่าของ Δx และ Δp สำหรับสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ
- ในสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ จงแสดงว่า

$$\Delta x \Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar \tag{3.8}$$

[สังเกตว่า $\Delta x \Delta p \geq \dfrac{\hbar}{2}$ เสมอ! สอดคล้องกับ*หลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก* (Heisenberg's uncertainty principle)]

แนวทางการเฉลยข้อสอบ

1. การแกว่งกวัดแบบบังคับ (Forced Oscillation)

สมการการเคลื่อนที่

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x=\frac{F_0}{m}\sin\omega t}$$

เมื่อ $\gamma\equiv\dfrac{b}{2m}$ และ $\omega_0\equiv\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ สมการการเคลื่อนที่มีผลเฉลยในรูป $x=x_\mathrm{c}+x_\mathrm{p}$ โดยที่ x_c เป็น*ผลเฉลยเติมเต็ม* (complimentary solution) และ x_p เป็น*ผลเฉลยเฉพาะ* (particular solution)

ต่อไปนี้เป็นเพียงวิธีการหนึ่งในการหาผลเฉลยทั้งสอง ซึ่งไม่ได้มีเพียงวิธีนี้เท่านั้น

➢ **<u>การหาผลเฉลยเติมเต็ม</u>**

ผลเฉลยเติมเต็ม x_c สอดคล้องสมการ

$$\frac{\mathrm{d}^2x_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t^2}+2\gamma\frac{\mathrm{d}x_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x_\mathrm{c}=0$$

หรือ

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\gamma\right)^2x_\mathrm{c}+\left(\omega_0^2-\gamma^2\right)x_\mathrm{c}=0$$

ซึ่งอาจแยกตัวประกอบได้ในรูป

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda_2\right)x_\mathrm{c}=0$$

ซึ่งสามารถแตกออกได้เป็น 2 สมการคือ

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda_1\right)u=0\qquad\text{และ}\qquad\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-\lambda_2\right)x_\mathrm{c}=u$$

สมการแรกให้ผลเฉลยเป็น $u = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ ทำให้ได้สมการที่สองเป็น

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - \lambda_2\right) x_\mathrm{c} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$$

หรือ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\, x_\mathrm{c}\right) = C_1\,\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}$$

นั่นคือ

$$\mathrm{e}^{-\lambda_2 t}\, x_\mathrm{c} = C_1\left[\int \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\,\mathrm{d}t\right] + C_2$$

ได้ผลเฉลยเติมเต็มเป็น

$$x_\mathrm{c} = C_1\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}\left[\int \mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)t}\,\mathrm{d}t\right] + C_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$$

a) $\boxed{\text{กรณีที่}}$ $\omega_0 > \gamma$ จะได้ $\lambda_1 = -\gamma - \mathrm{i}\,\beta$ และ $\lambda_2 = -\gamma + \mathrm{i}\,\beta$ เมื่อ $\beta \equiv \sqrt{\left|\omega_0^2 - \gamma^2\right|}$ ได้ผลเฉลยเติมเต็มเป็น

$$\begin{aligned}
x_\mathrm{c} &= C_1\,\mathrm{e}^{(-\gamma+\mathrm{i}\beta)t}\left[\int \mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}\beta)t}\,\mathrm{d}t\right] + C_2\,\mathrm{e}^{(-\gamma+\mathrm{i}\beta)t} \\
&= C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\beta t}}{-2\mathrm{i}\beta} + C_2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t} \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\kappa_1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta t} + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta t}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\alpha_1 \sin\beta t + \alpha_2\cos\beta t\right)
\end{aligned}$$

หรือเขียนใหม่ในรูป

$$x_\mathrm{c} = A_\mathrm{c}\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\left(\beta t + \varphi_\mathrm{c}\right)$$

เมื่อ $C_1,\ C_2,\ \kappa_1,\ \kappa_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ A_\mathrm{c}$ และ φ_c เป็นค่าคงตัวใดๆ

b) $\boxed{\text{กรณีที่}}$ $\omega_0 < \gamma$ จะได้ $\lambda_1 = -\gamma - \beta$ และ $\lambda_2 = -\gamma + \beta$ เมื่อ $\beta \equiv \sqrt{\left|\omega_0^2 - \gamma^2\right|}$ ได้ผลเฉลยเติมเต็มเป็น

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{c}} &= C_1\,\mathrm{e}^{(-\gamma+\beta)t}\left[\int \mathrm{e}^{(-2\beta)t}\,\mathrm{d}t\right] + C_2\,\mathrm{e}^{(-\gamma+\beta)t} \\ &= C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\beta t}\,\frac{\mathrm{e}^{-2\beta t}}{-2\beta} + C_2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\beta t} \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\kappa_1\,\mathrm{e}^{-\beta t} + \kappa_2\,\mathrm{e}^{\beta t}\right) \end{aligned}$$

เมื่อ C_1, C_2, κ_1 และ κ_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

c) $\boxed{\text{กรณีที่}}$ $\omega_0 = \gamma$ จะได้ $\lambda_1 = -\gamma$ และ $\lambda_2 = -\gamma$ ได้ผลเฉลยเติมเต็มเป็น

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{c}} &= C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\int \mathrm{e}^{(0)t}\,\mathrm{d}t\right] + C_2\,\mathrm{e}^{-\gamma t} \\ &= C_1\,\mathrm{e}^{-\gamma t} t + C_2\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\mathrm{e}^{\beta t} \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(C_1\,t + C_2\right) \end{aligned}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นค่าคงตัวใดๆ

นั่นคือได้ผลเฉลยเติมเต็มเป็น

$$\boxed{x_{\mathrm{c}} = \begin{cases} A_{\mathrm{c}}\,\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\left(\sqrt{\left|\omega_0^2 - \gamma^2\right|}\,t + \varphi_{\mathrm{c}}\right) & ;\ \omega_0 > \gamma \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(C_1\,t + C_2\right) & ;\ \omega_0 = \gamma \\ \mathrm{e}^{-\gamma t}\left[\kappa_1 \exp\left(-\sqrt{\left|\omega_0^2 - \gamma^2\right|}\,t\right) + \kappa_2 \exp\left(\sqrt{\left|\omega_0^2 - \gamma^2\right|}\,t\right)\right] & ;\ \omega_0 < \gamma \end{cases}}$$

เมื่อ $\gamma \equiv \dfrac{b}{2m}$ และ $\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ สังเกตว่าเมื่อเวลาผ่านไปนานมากๆ ($t \to \infty$) ผลเฉลยเติมเต็มจะหายไป (เข้าสู่ศูนย์) เหลือเพียงแค่ผลเฉลยเฉพาะเท่านั้น

$$\lim_{t\to\infty} x_{\mathrm{c}} = 0 \quad \text{ดังนั้น} \quad \lim_{t\to\infty} x = x_{\mathrm{p}}$$

➢ **<u>การหาผลเฉลยเฉพาะ</u>**

ผลเฉลยเฉพาะ x_{p} สอดคล้องสมการ

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x_{\mathrm{p}} = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

หรือ

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

เมื่อผลเฉลยเฉพาะ $x_\mathrm{p} = \mathrm{Im}(z)$ กำหนดให้ $z = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \varphi)}$ แทนลงในสมการการเคลื่อนที่จะได้

$$-\omega^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} + 2\mathrm{i}\gamma\omega A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} + \omega_0^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)} = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A + 2\mathrm{i}\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A + 2\mathrm{i}\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\cos\varphi + \mathrm{i}\frac{F_0}{m}\sin\varphi$$

ซึ่งสามารถแตกออกได้เป็น 2 สมการคือ

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)A = \frac{F_0}{m}\cos\varphi \qquad \text{และ} \qquad 2\gamma\omega A = \frac{F_0}{m}\sin\varphi$$

ซึ่งให้

$$\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4(\gamma\omega)^2\right]A^2 = \left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \qquad \text{และ} \qquad \frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)} = \tan\varphi$$

จะได้ว่า

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \qquad \text{และ} \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

โดยมีผลเฉลยเฉพาะ $x_\mathrm{p} = \mathrm{Im}\left[A\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\varphi)}\right] = A\sin(\omega t - \varphi)$ เป็น

$$\boxed{x_\mathrm{p} = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\sin\left[\omega t - \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right]}$$

เมื่อเวลาผ่านไปนานมากๆ ($t \to \infty$) ผลเฉลยเติมเต็มจะหายไป (เข้าสู่ศูนย์) เหลือเพียงแค่ผลเฉลยเฉพาะเท่านั้นคือ

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \sin\left[\omega t - \tan^{-1}\frac{2\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}\right]}$$

ในที่นี้แอมพลิจูดของการกระจัดคือ

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

ซึ่งจะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}A(\omega)\right|_{\omega=\omega_\mathrm{m}} = 0$ และ $\left.\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2}A(\omega)\right|_{\omega=\omega_\mathrm{m}} < 0$ (เงื่อนไขที่สองนี้ไม่จำเป็นต้องนำมาใช้)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}A(\omega) = -\frac{2F_0\omega\left[\omega^2 - \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)\right]}{m\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2\right]^{3/2}}$$

หรือ

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}A(\omega)\right|_{\omega=\omega_\mathrm{m}} = -\frac{2F_0\omega_\mathrm{m}\left[\omega_\mathrm{m}^2 - \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)\right]}{m\left[\left(\omega_0^2 - {\omega_\mathrm{m}}^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega_\mathrm{m}^2\right]^{3/2}} = 0$$

จะได้ความถี่เชิงมุมที่ทำให้แอมพลิจูดของการกระจัดมีค่าสูงสุดเป็น

$$\omega_\mathrm{m} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

หรือ

$$\omega_\mathrm{m} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} = \frac{1}{2m}\sqrt{4mk - 2b^2}$$

แอมพลิจูดสูงสุดของการกระจัดคือ

$$A_\mathrm{max} = A(\omega_\mathrm{m}) = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$$

หรือ

$$\boxed{A_{\max} = \frac{F_0}{b\sqrt{\dfrac{k}{m} - \dfrac{b^2}{4m^2}}} = \frac{2mF_0}{b\sqrt{4mk - b^2}}}$$

---

2. จุดวิกฤติของแก๊สฟันเดอร์วาลส์ (Critical Point of van der Waals Gas)

สมการสถานะฟันเดอร์วาลส์

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)\left(V - nb\right) = nRT = Nk_{\mathrm{B}}T$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

- มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความดันเทียบกับปริมาตรเมื่ออุณหภูมิคงตัวเป็น

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T &= \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \left(\frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}\right) \\ &= nRT\frac{\partial}{\partial V}\left(V - nb\right)^{-1} - an^2\frac{\partial}{\partial V}V^{-2} \\ &= -\frac{nRT}{\left(V - nb\right)^2} + \frac{2an^2}{V^3}\end{aligned}$$

- มีอัตราการเปลี่ยนแปลงอันดับสองของความดันเทียบกับปริมาตรเมื่ออุณหภูมิคงตัวเป็น

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T &= \left(\frac{\partial}{\partial V}\right)_T \left[-\frac{nRT}{\left(V - nb\right)^2} + \frac{2an^2}{V^3}\right] \\ &= -nRT\frac{\partial}{\partial V}\left(V - nb\right)^{-2} + 2an^2\frac{\partial}{\partial V}V^{-3} \\ &= \frac{2nRT}{\left(V - nb\right)^3} - \frac{6an^2}{V^4}\end{aligned}$$

ที่จุดวิกฤติ $\left(T_c, V_c, P_c\right)$ มีเงื่อนไขว่า

$$\left.\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right|_{(T_c,V_c,P_c)} = 0 \quad \text{และ} \quad \left.\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T\right|_{(T_c,V_c,P_c)} = 0$$

นั่นคือ

$$\frac{nRT_c}{\left(V_c - nb\right)^2} = \frac{2an^2}{V_c^3} \quad \text{และ} \quad \frac{2nRT_c}{\left(V_c - nb\right)^3} = \frac{6an^2}{V_c^4}$$

เมื่อนำทั้งสองสมการมาหารกันจะได้

$$\frac{V_c - nb}{2} = \frac{V_c}{3}$$

ปริมาตรวิกฤติ V_c มีค่าเป็น

$$\boxed{V_c = 3nb}$$

แทนค่าปริมาตรวิกฤติ V_c ในสมการ $\frac{nRT_c}{\left(V_c - nb\right)^2} = \frac{2an^2}{V_c^3}$ จะได้อุณหภูมิวิกฤติ T_c เป็น

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{2an^2}{nR}\,\frac{\left(V_c - nb\right)^2}{V_c^3} = \frac{2an}{R}\,\frac{\left(3nb - nb\right)^2}{\left(3nb\right)^3} \\ &= \frac{2an}{R}\,\frac{4n^2b^2}{27n^3b^3} \end{aligned}$$

นั่นคือได้อุณหภูมิวิกฤติ T_c มีค่าเป็น

$$\boxed{T_c = \frac{8a}{27Rb}}$$

แทนค่าปริมาตรวิกฤติ V_c และอุณหภูมิวิกฤติ T_c ในสมการ $P_c = \frac{nRT_c}{V_c - nb} - \frac{an^2}{V_c^2}$ จะได้ความดันวิกฤติ P_c เป็น

$$P_{\mathrm{c}} = \frac{nR}{3nb - nb}\left(\frac{8a}{27Rb}\right) - \frac{an^2}{(3nb)^2} = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2}$$

นั่นคือได้ความดันวิกฤติ P_{c} มีค่าเป็น

$$\boxed{P_{\mathrm{c}} = \frac{a}{27b^2}}$$

ณ จุดวิกฤติ $\left(T_{\mathrm{c}}, V_{\mathrm{c}}, P_{\mathrm{c}}\right)$

$$\frac{P_{\mathrm{c}} V_{\mathrm{c}}}{nRT_{\mathrm{c}}} = \frac{1}{nR}\left(\frac{a}{27b^2}\right)\left(3nb\right)\left(\frac{27Rb}{8a}\right)$$

นั่นคือ

$$\boxed{\frac{P_{\mathrm{c}} V_{\mathrm{c}}}{nRT_{\mathrm{c}}} = \frac{3}{8}}$$

เขียนสมการสถานะฟันเดอร์วาลส์ $P = \dfrac{nRT}{V - nb} - \dfrac{an^2}{V^2}$ ใหม่ได้เป็น

$$P = \frac{nRT}{V}\left(1 - \frac{nb}{V}\right)^{-1} - a\left(\frac{n}{V}\right)^2$$

หรือ

$$\frac{PV}{nRT} = \left(1 - \frac{nb}{V}\right)^{-1} - \frac{a}{RT}\left(\frac{n}{V}\right)$$

สำหรับกรณีที่ $\left|x\right| < 1$ และ $n \in \mathbb{Z}^+$ อนุกรมแมคลอรินของ $(1+x)^n$ คือ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \cdots$$

นั่นคือจะได้ว่าอนุกรมแมคลอรินของ $(1-x)^{-1}$ คือ

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \cdots$$

ดังนั้นสำหรับกรณีที่ $V > nb$ หรือ $\dfrac{nb}{V} < 1$ จะได้

$$\frac{PV}{nRT} = \left[1 + \left(\frac{nb}{V}\right) + \left(\frac{nb}{V}\right)^2 + \left(\frac{nb}{V}\right)^3 + \left(\frac{nb}{V}\right)^4 + \cdots\right] - \frac{a}{RT}\left(\frac{n}{V}\right)$$

หรือ

$$\boxed{\frac{PV}{nRT} = 1 + \left(b - \frac{a}{RT}\right)\left(\frac{n}{V}\right) + b^2\left(\frac{n}{V}\right)^2 + b^3\left(\frac{n}{V}\right)^3 + b^4\left(\frac{n}{V}\right)^4 + \cdots}$$

---

3. ตัวแกว่งกวัดแบบฮาร์มอนิกใน 1 มิติ (One-Dimensional Harmonic Oscillator)

เนื่องจาก $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ และ $\hat{a} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \dfrac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right)$ กับ $\hat{a}^\dagger = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \dfrac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right)$ จะได้

$$\begin{aligned}
\hat{a}\hat{a}^\dagger &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right)\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\hat{p}\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\hat{p}^2 - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}[\hat{x}, \hat{p}]\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\hat{p}^2 + \frac{\hbar}{m\omega}\right)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\boxed{\hat{a}\hat{a}^\dagger = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}}$$

หรือ

$$\frac{m\omega}{2\hbar}\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\hat{p}^2 = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\hat{a}\,\hat{a}^\dagger = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}}$$

และจะได้

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger\hat{a} &= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x} - \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\,\hat{p}\right)\left(\hat{x} + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}\,\hat{p}\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\,\hat{p}^2 + \frac{\mathrm{i}}{m\omega}[\hat{x},\hat{p}]\right) \\
&= \frac{m\omega}{2\hbar}\left(\hat{x}^2 + \frac{1}{m^2\omega^2}\,\hat{p}^2 - \frac{\hbar}{m\omega}\right)
\end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\boxed{\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar}\,\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\,\hat{p}^2 - \frac{1}{2}}$$

หรือ

$$\frac{m\omega}{2\hbar}\,\hat{x}^2 + \frac{1}{2m\hbar\omega}\,\hat{p}^2 = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\omega}\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\right) = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}}$$

จะได้ว่า $[\hat{a},\hat{a}^\dagger\,] = \hat{a}\,\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\hat{H}}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)$ หรือ

$$\boxed{[\hat{a},\hat{a}^\dagger\,] = 1}$$

และยังได้ว่า

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\,\omega\left(\hat{a}^\dagger\,\hat{a} + \frac{1}{2}\right)}$$

ในสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ จะได้

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = \hbar\,\omega\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left|n\right\rangle + \frac{1}{2}\left|n\right\rangle\right) = \hbar\,\omega\left(\sqrt{n}\;\hat{a}^{\dagger}\left|n-1\right\rangle + \frac{1}{2}\left|n\right\rangle\right) = \hbar\,\omega\left(n\left|n\right\rangle + \frac{1}{2}\left|n\right\rangle\right)$$

หรือ

$$\hat{H}\left|n\right\rangle = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)\left|n\right\rangle$$

เนื่องจาก $\hat{a} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \dfrac{\mathrm{i}}{m\omega}\,\hat{p}\right)$ และ $\hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\dfrac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \dfrac{\mathrm{i}}{m\omega}\,\hat{p}\right)$ จะได้

$$\hat{a} + \hat{a}^{\dagger} = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\;\hat{x} \qquad \text{และ} \qquad \hat{a} - \hat{a}^{\dagger} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}\;\hat{p}$$

นั่นคือได้ตัวดำเนินการตำแหน่งและตัวดำเนินการโมเมนตัมเป็น

$$\boxed{\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\right) \qquad \text{และ} \qquad \hat{p} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\right)}$$

กับได้

$$\hat{x}^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\right)\left(\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\right) = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\,\hat{a} + \hat{a}\,\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)$$

และ

$$\hat{p}^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\right)\left(\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}\right) = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}\,\hat{a} - \hat{a}\,\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)$$

ในสถานะถูกกระตุ้นอันดับที่ n ใดๆ จะได้

$$\hat{x}\left|n\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^{\dagger}\left|n\right\rangle + \hat{a}\left|n\right\rangle\right) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\;\left|n+1\right\rangle + \sqrt{n}\;\left|n-1\right\rangle\right)$$

และ

$$\hat{p}\left|n\right\rangle = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^{\dagger}\left|n\right\rangle - \hat{a}\left|n\right\rangle\right) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\;\left|n+1\right\rangle - \sqrt{n}\;\left|n-1\right\rangle\right)$$

กับได้

$$\begin{aligned}\hat{x}^2\Big|n\Big\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\Big|n\Big\rangle + \hat{a}\,\hat{a}\Big|n\Big\rangle + \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\Big|n\Big\rangle + \hat{a}^\dagger\hat{a}\Big|n\Big\rangle\right)\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{n+1}\ \hat{a}^\dagger\Big|n+1\Big\rangle + \sqrt{n}\ \hat{a}\Big|n-1\Big\rangle + \sqrt{n+1}\ \hat{a}\Big|n+1\Big\rangle + \sqrt{n}\ \hat{a}^\dagger\Big|n-1\Big\rangle\right)\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\ \Big|n+2\Big\rangle + \sqrt{n(n-1)}\ \Big|n-2\Big\rangle + (n+1)\ \Big|n\Big\rangle + n\ \Big|n\Big\rangle\right]\\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(2n+1)\ \Big|n\Big\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\ \Big|n+2\Big\rangle + \sqrt{n(n-1)}\ \Big|n-2\Big\rangle\right]\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\hat{p}^2\Big|n\Big\rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\Big|n\Big\rangle + \hat{a}\,\hat{a}\Big|n\Big\rangle - \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\Big|n\Big\rangle - \hat{a}^\dagger\hat{a}\Big|n\Big\rangle\right)\\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\sqrt{n+1}\ \hat{a}^\dagger\Big|n+1\Big\rangle + \sqrt{n}\ \hat{a}\Big|n-1\Big\rangle - \sqrt{n+1}\ \hat{a}\Big|n+1\Big\rangle - \sqrt{n}\ \hat{a}^\dagger\Big|n-1\Big\rangle\right)\\ &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\ \Big|n+2\Big\rangle + \sqrt{n(n-1)}\ \Big|n-2\Big\rangle - (n+1)\ \Big|n\Big\rangle - n\ \Big|n\Big\rangle\right]\\ &= \frac{m\hbar\omega}{2}\left[(2n+1)\ \Big|n\Big\rangle - \sqrt{(n+1)(n+2)}\ \Big|n+2\Big\rangle - \sqrt{n(n-1)}\ \Big|n-2\Big\rangle\right]\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\Big\langle n\Big|n-1\Big\rangle = 0$ และ $\Big\langle n\Big|n+1\Big\rangle = 0$ สำหรับทุกค่า $n \in \mathbb{Z}^+$

- ค่าของ $\Big\langle n\Big|\hat{x}\Big|n\Big\rangle$ หาได้ดังนี้

$$\Big\langle n\Big|\hat{x}\Big|n\Big\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\ \Big\langle n\Big|n+1\Big\rangle + \sqrt{n}\ \Big\langle n\Big|n-1\Big\rangle\right)$$

ดังนั้น

$$\boxed{\Big\langle n\Big|\hat{x}\Big|n\Big\rangle = 0}$$

- ค่าของ $\Big\langle n\Big|\hat{p}\Big|n\Big\rangle$ หาได้ดังนี้

$$\Big\langle n\Big|\hat{p}\Big|n\Big\rangle = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\sqrt{n+1}\ \Big\langle n\Big|n+1\Big\rangle - \sqrt{n}\ \Big\langle n\Big|n-1\Big\rangle\right)$$

ดังนั้น

$$\boxed{\Big\langle n\Big|\hat{p}\Big|n\Big\rangle = 0}$$

- ค่าของ $\Big\langle n\Big|\hat{x}^2\Big|n\Big\rangle$ หาได้ดังนี้

$$\Big\langle n\Big|\hat{x}^2\Big|n\Big\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(2n+1)\Big\langle n\Big|n\Big\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}\Big\langle n\Big|n+2\Big\rangle + \sqrt{n(n-1)}\Big\langle n\Big|n-2\Big\rangle\right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\left\langle n\left|\hat{x}^2\right|n\right\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

- ค่าของ $\left\langle n\left|\hat{p}^2\right|n\right\rangle$ หาได้ดังนี้

$$\left\langle n\left|\hat{p}^2\right|n\right\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}\left[(2n+1)\left\langle n\middle|n\right\rangle - \sqrt{(n+1)(n+2)}\left\langle n\middle|n+2\right\rangle - \sqrt{n(n-1)}\left\langle n\middle|n-2\right\rangle\right]$$

ดังนั้น

$$\boxed{\left\langle n\left|\hat{p}^2\right|n\right\rangle = m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

- ค่าของ $\left\langle n\left|\hat{H}\right|n\right\rangle$ หาได้ดังนี้

$$\left\langle n\left|\hat{H}\right|n\right\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\langle n\middle|n\right\rangle$$

ดังนั้น

$$\boxed{\left\langle n\left|\hat{H}\right|n\right\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

- ค่าของ Δx หาได้ดังนี้

$$\Delta x = \sqrt{\left\langle n\left|\hat{x}^2\right|n\right\rangle - \left\langle n\left|\hat{x}\right|n\right\rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right) - 0^2}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

- ค่าของ Δp หาได้ดังนี้

$$\Delta p = \sqrt{\left\langle n\left|\hat{p}^2\right|n\right\rangle - \left\langle n\left|\hat{p}\right|n\right\rangle^2} = \sqrt{m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - 0^2}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\Delta p = \sqrt{m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}}$$

- ค่าของ $\Delta x\Delta p$ หาได้ดังนี้

$$\Delta x\Delta p = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)}\ \sqrt{m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

ดังนั้น

$$\boxed{\Delta x\Delta p = \left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar}$$
