บทที่ 1

เมทริกซ์ (Matrix)

1.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเมทริกซ์

บทนิยาม 1.1 :
เมทริกซ์ คือ การนำชุดของตัวเลขมาเขียนเรียงกันอย่างมีระบบภายใต้เครื่องหมายก้ามปู "[ ]" หรือเครื่องหมายวงเล็บ "( )" และเรานิยมใช้ตัวอักษรโรมันพิมพ์ใหญ่เพื่อใช้แทนเมทริกซ์

โครงสร้างของเมทริกซ์ประกอบด้วยประกอบด้วย "สมาชิก" (element) ทั้งแนวตั้งและแนวนอน ในแนวตั้งเรียกว่า "หลัก" (column) ส่วนแนวนอนเรียกว่า "แถว" (row)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

การอ้างถึงสมาชิกแต่ละตัวในเมทริกซ์ ทำได้โดยการอ้างถึงตาม "ตำแหน่ง" ของสมาชิกนั้นในเมทริกซ์ การเรียกตำแหน่งของสมาชิกในเมทริกซ์ กำหนดโดยเลข 2 ตัว เรียกว่า "ดัชนี" (index) โดยที่เลขตัวหน้าใช้บอกแถวที่สมาชิกนั้นอยู่ ส่วนเลขตัวหลังใช้บอกหลักที่สมาชิกนั้นอยู่

และเรามักกล่าวถึง "มิติ" (dimension) ของเมทริกซ์ มิติ(หรือขนาด) ของเมทริกซ์ คือ ตัวเลขที่ใช้บอกจำนวนของแถวและหลักของเมทริกซ์นั้น นิยมเขียนในรูปการคูณกันของจำนวนแถวและจำนวนหลัก เช่น

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ เป็น 2×2 เมทริกซ์

$B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ เป็น 1×3 เมทริกซ์

$C = \begin{bmatrix} 20 \end{bmatrix}$ เป็น 1×1 เมทริกซ์

สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียง 1 แถว แต่มีจำนวนหลักมากกว่า 1 หลัก จะเรียกว่า "เมทริกซ์แถว" (row matrix) และในทำนองเดียวกัน สำหรับเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเพียง 1 หลัก แต่มีจำนวนมากกว่า 1 แถว จะเรียกว่า "เมทริกซ์หลัก" (column matrix)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์แถว $\qquad\qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์หลัก

บทนิยาม 1.2 :

เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย A = B ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันมีค่าเท่ากันด้วย

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

จงตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จงหาสมาชิกในตำแหน่งที่ 12 และตำแหน่งที่ 21 ของเมทริกซ์ A

(2) เมทริกซ์ B เป็นเมทริกซ์ชนิดใด (เมทริกซ์แถวหรือเมทริกซ์หลัก) พร้อมทั้งบอกมิติของ B

(3) จงหามิติของเมตริกซ์ C

วิธีทำ (1) พิจารณาเมทริกซ์ A สมาชิกในตำแหน่งที่ 12 คือ 1
และ สมาชิกในตำแหน่งที่ 21 คือ 2 Ans..

(2) พิจารณาเมทริกซ์ B จะพบว่าเป็นเมทริกซ์หลัก และมีมิติเท่ากับ 2×1
Ans..

(3) เมทริกซ์ C มีมิติเท่ากับ 3×3 Ans..

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า x , y ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} 2x+y \\ -x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -11 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เมทริกซ์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อ

$2x + y = 2$

$-x + 2y = -11$

แก้ระบบสมการเชิงเส้น จะได้ว่า

	$2x + y$	=	2	……………………..(1)
	$-x + 2y$	=	-11	……………………..(2)
$2 \times (2)$	$-2x + 4y$	=	-22	……………………..(3)
(1) + (3)	$5y$	=	-20	
	y	=	$\frac{-20}{5}$	
	y	=	-4	

แทน y = -4 ใน (1)

$2x + (-4)$	=	2
$2x$	=	$2 - (-4)$
$2x$	=	$2 + 4$
x	=	$\frac{6}{2}$
x	=	3

เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้น จะได้ x =3 , y = -4

ดังนั้น ค่าของ x และ y ที่ทำให้เมทริกซ์ที่กำหนดเท่ากัน คือ 3 และ -4 ตามลำดับ Ans..

1.2 เมทริกซ์พิเศษ

1.2.1 เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix)

คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\underline{0}$ เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2.2 เมทริกซ์สามเหลี่ยม (Triangular Matrix)

คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกที่อยู่เหนือหรือใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด แบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน และเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

1.2.3 เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix)

คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.4 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)

คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกตามแนวเส้นทแยงมุมหลักเป็นหนึ่งทั้งหมด และสมาชิกในตำแหน่งอื่นๆ เป็นศูนย์ทั้งหมด เขียนแทนด้วย I_n เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.3.5 การสลับย้ายของเมทริกซ์ (Transposition of a Matrix)

การสลับย้ายของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^T คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการสลับสมาชิกในแถวและหลักของเมทริกซ์ เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว} \quad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว} \quad B^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดมากกว่า 2×2 เมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 มาชนิดละ 1 ตัวอย่าง
2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์สลับย้าย (A^T) ของ A

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.3 พีชคณิตเมทริกซ์ และสมบัติของเมทริกซ์ (Operation of a Matrix)

1.3.1 การบวกและการลบเมทริกซ์

บทนิยาม 1.3 :

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ แล้ว

(1) $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$

(2) $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$

ข้อสังเกต

(1) จากบทนิยามเมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะบวกหรือลบกันได้ จะต้องมีมิติเท่ากันเสมอ

(2) ในการบวกหรือลบเมทริกซ์ สมมติว่า $C = A + B$ จะกล่าวว่าเมทริกซ์ C จะประกอบด้วยสมาชิกที่ได้จากสมาชิกของเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B ที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันนำมาบวกหรือลบกัน

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

จงหา $A + B$, $A + C$ และ $B + C$

วิธีทำ

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+2 & 2+0 \\ 0+1 & (-1)+(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$ Ans..

$A + C$ ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจากมิติไม่เท่ากัน Ans..

$B + C$ ไม่สามารถหาค่าได้เนื่องจากมิติไม่เท่ากัน Ans..

ตัวอย่างที่ 4 จากโจทย์ในตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ A – B

วิธีทำ

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2 & 2-0 \\ 0-1 & (-1)-(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ans..

1.3.2 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม 1.4 :
กำหนดให้ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ และ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ จะได้ว่า $cA = [ca_{ij}]_{m\times n}$

จากบทนิยามจะเห็นว่า ผลลัพธ์จากการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์นั้นก็คือ เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกซึ่งเกิดจากสมาชิกแต่ละตัวของเมทริกซ์เดิมคูณกับจำนวนจริงนั้นนั่นเอง

ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ k = -2 แล้ว จงหาค่า kA

วิธีทำ

$$kA = k\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad (\text{แทน } k = -2)$$

$$= (-2)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \end{bmatrix}$$

1.3.3 สมบัติของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 1.1 :

กำหนดให้ A, B, C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ขนาด $m \times n$ และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

(1) $A + B = B + A$ เรียกว่า สมบัติการสลับที่การบวก

(2) $c(A + B) = cA + cB$ เรียกว่า สมบัติการแจกแจงด้วยสเกลาร์

(3) $A + (B + C) = (A + B) + C$ เรียกว่า สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มของการบวก

(4) $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$ เรียกว่า สมบัติการมีเอกลักษณ์การบวก

(5) $A + (-A) = \underline{0}$ เรียกว่า สมบัติการมีอินเวอร์สการบวก

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาค่า A + 2B และ 2A + (-3)B

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
A + 2B &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ -4 & -2 & 6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+(-2) & 1+2 & 0+4 \\ 2+(-4) & (-1)+(-2) & 3+6 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 9 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Ans..</u>

$$
\begin{aligned}
2A + (-3)B &= 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 & -6 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2+3 & 2+(-3) & 0+(-6) \\ 4+6 & (-2)+3 & 6+(-9) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & -1 & -6 \\ 10 & 1 & -3 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาค่า A - 2B และ 3A - 4B

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
A - 2B &= A + (-2)B \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-1)+(-2) & 0+(-2) \\ 2+(-4) & 1+2 \\ 3+0 & 3+(-4) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

$$\begin{aligned}
3A - 4B &= 3A + (-4)B \\
&= 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -8 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (-3)+(-4) & 0+(-4) \\ 6+(-8) & 3+4 \\ 9+0 & 9+(-8) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดเมทริกซ์ A, B ดังนี้

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) 2A – B

(2) B – 2A

(3) 2A – 2B

(4) B – A

2. กำหนดเมทริกซ์ A, B และ C ดังนี้

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) A + B

(2) (A + B) + C

(3) (B + A) – C

(4) B – (A + C)

(3) A + (B + C)

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.4 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

บทนิยาม 1.5 :

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ และ $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ แล้ว

ผลคูณระหว่างเมทริกซ์ A และเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย AB

กำหนดโดย $AB = C = [c_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}$

ข้อสังเกต

สองเมทริกซ์ใดๆ จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อ "จำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวตั้ง เท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวคูณ และเมทริกซ์ผลคูณจะมีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ตัวตั้ง และจำนวนหลักเท่ากับจำนวนหลักของเมทริกซ์ตัวคูณ"

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาค่าของ AB , BC , A(BC) , (AB)C

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times5)+(2\times8) & (1\times6)+(2\times9) & (1\times7)+(2\times10) \\ (3\times5)+(4\times8) & (3\times6)+(4\times9) & (3\times7)+(4\times10) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+16 & 6+18 & 7+20 \\ 15+32 & 18+36 & 21+40 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{bmatrix}$$

Ans..

$$BC = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5\times 11)+(6\times 12)+(7\times 13) \\ (8\times 11)+(9\times 12)+(10\times 13) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 55+72+91 \\ 88+108+130 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 218 \\ 326 \end{bmatrix}$$ Ans..

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 218 \\ 326 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 218)+(2\times 326) \\ (3\times 218)+(4\times 326) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 218+652 \\ 654+1304 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 870 \\ 1958 \end{bmatrix}$$ Ans..

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 21 & 24 & 27 \\ 47 & 54 & 61 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (21\times 11)+(24\times 12)+(27\times 13) \\ (47\times 11)+(54\times 12)+(61\times 13) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 231+288+351 \\ 517+648+793 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 870 \\ 1958 \end{bmatrix}$$ Ans..

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาค่าของ AB , BA , AI และ IA

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 1)+(0\times 4) & (1\times(-3))+(0\times 5) \\ (2\times 1)+(1\times 4) & (2\times(-3))+(1\times 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & (-3)+0 \\ 2+4 & (-6)+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 1)+((-3)\times 2) & (1\times 0)+((-3)\times 1) \\ (4\times 1)+(5\times 2) & (4\times 0)+(5\times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+(-6) & 0+(-3) \\ 4+10 & 0+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 14 & 5 \end{bmatrix}$$

Ans..

จะเห็นได้ว่า $AB \neq BA$

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 1)+(0\times 0) & (1\times 0)+(0\times 1) \\ (2\times 1)+(1\times 0) & (1\times 0)+(1\times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ans..

$$IA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times1)+(0\times2) & (1\times0)+(0\times1) \\ (0\times1)+(1\times2) & (0\times0)+(1\times1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+2 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ans..

จะเห็นได้ว่า $AI = IA$

จากตัวอย่างที่ 8 และ 9 จะเห็นได้ว่า $AB \neq BA$ และโดยทั่วไปจะพบว่า $AB \neq BA$ แต่อย่างไรก็ตามมีเงื่อนไขบางประการที่ทำให้ $AB = BA$ ซึ่งเราจะพิจารณาต่อไป

หลังจากทราบวิธีการคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์แล้ว ต่อไปจะเป็นสมบัติเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 :

กำหนดให้ A , B , C เป็นเมทริกซ์ใดๆ ขนาด $m \times n$ จะได้ว่า

(1) $(AB)C = A(BC)$

(2) $A(B+C) = AB + AC$

(3) $(B+C)A = BA + CA$

เพื่อนๆ สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมช่วยคำนวณเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ ได้ที่

http://www.easycalculation.com/matrix/matrix-multiplication.php

ตัวอย่างที่ 10 กำหนดให้ A = $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหาค่าของ AB , BA , AI

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 2)+((-1)\times 1) & (1\times 1)+((-1)\times 2) \\ ((-1)\times 2)+(1\times 1) & ((-1)\times 1)+(1\times 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & 1+(-2) \\ (-2)+1 & (-1)+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ Ans..

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times 1)+(1\times(-1)) & (2\times(-1))+(1\times 1) \\ (1\times 1)+(2\times(-1)) & (1\times(-1))+(2\times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-1) & (-2)+1 \\ 1+(-2) & (-1)+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ Ans..

$$AI = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1\times 1)+((-1)\times 0) & (1\times 0)+((-1)\times 1) \\ ((-1)\times 1)+(1\times 0) & ((-1)\times 0)+(1\times 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 0+(-1) \\ (-1)+0 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$ Ans..

จากตัวอย่างที่ 10 จะเห็นได้ว่า AB = BA = A และ AI = A ถึงแม้ว่า B $\neq$ I ก็ตาม แต่ก็ยังได้ว่า AB = AI = A

แบบฝึกหัด 1.4

1. กำหนดเมทริกซ์ A , B ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

   จงหา AB และ BA

2. กำหนดให้เมทริกซ์ A , B , C , D , E ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา

   (1) $2C - 3E$

   (2) AB และ BA

   (3) (AB)D

   (4) BA(C + E)

3. กำหนดเมทริกซ์ A , B ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

   จงแสดงว่า $AB \neq BA$

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.5 ทฤษฎีบทอื่นๆ ที่เกี่ยวกับเมทริกซ์

ทฤษฎีบท 1.3 :

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ

และ c , d เป็นจำนวนจริงใดๆ

(1) $cA^T = (cA)^T$

(2) $(A^T)^T = A$

(3) $(A+B)^T = A^T + B^T$

(4) $(AB)^T = B^T A^T$

(5) $(c+d)A = cA + dA$

(6) $c(dA) = (cd)A = d(cA)$

บทนิยาม 1.6 :

ให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ได้ว่า

$$A^n = \underbrace{AAA\ldots A}_{\text{n เมทริกซ์}}$$

ตัวอย่างที่ 11 $A^2 = AA$

$A^3 = A^2A$

$A^4 = A^2A^2 = A^3A$

ทฤษฎีบท 1.4 :

กำหนดให้ กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $C = [c_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ใดๆ จะได้ว่า

(1) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

(2) $(A-B)^2 = A^2 - (AB+BA) + B^2$

(3) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB + B^2$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^2 และ A^3

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+2 & 0+3 \\ 0+6 & 2+9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0+6 & 2+9 \\ 0+22 & 6+33 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 11 \\ 22 & 39 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 13 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ แล้ว

จงหา $(AB)^T$ และ B^TA^T

วิธีทำ

หา AB

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)+0 & (-1)+(-2) & 1+3 \\ 0+0 & 0+(-4) & 0+6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $(AB)^T = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

<u>Ans..</u>

หา $A^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $B^T A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (-2)+0 & 0+0 \\ (-1)+(-2) & 0+(-4) \\ 1+3 & 0+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ Ans..

จากตัวอย่างที่ 13 จะเห็นได้ว่า $(AB)^T = B^T A^T$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนดให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $(A+B)^2$

(2) $A^2 + 2AB + B^2$

(3) $(A+B)(A-B)$

(4) $A^2 - B^2$

วิธีทำ (1) หา $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+10 & 4+10 \\ 10+25 & 10+25 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 35 & 35 \end{bmatrix}$ Ans..

(2) หา $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 3+12 & 6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$

$2AB = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1+4 & 0+2 \\ 3+8 & 0+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 2+2 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 22 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7+10+1 & 10+4+0 \\ 15+22+4 & 22+8+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 41 & 31 \end{bmatrix}$ Ans..

(3) หา $A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 3+2 & 4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$

$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 2-0 \\ 3-2 & 4-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $(A+B)(A-B) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0+2 & 4+6 \\ 0+5 & 10+15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}$ Ans..

(4) หา $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 7-1 & 10-0 \\ 15-4 & 22-1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 11 & 21 \end{bmatrix}$ Ans..

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้เมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $2(A+X) = X + \frac{1}{2}A$

วิธีทำ ให้ X เป็น 2×3 เมทริกซ์ที่ทำให้

$$2(A+X) = X + \frac{1}{2}A$$

$$2A + 2X = X + \frac{1}{2}A$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสมการ

$$4A + 4X = 2X + A$$

$$4X - 2X = A - 4A$$

$$2X = -3A$$

$$X = \frac{-3A}{2} \text{ หรือ } -\frac{3}{2}A$$

นั่นคือ

$$X = -\frac{3}{2}A$$

$$= -\frac{3}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

<u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนดเมทริกซ์ A , B , C , D , E ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $AB + D^2$

(2) $BA - 2C^2$

(3) $A^T B^T + 2E$

2. กำหนดเมทริกซ์ A , B , C ดังนี้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) ABC

(2) $AB + AC^T$

(3) $A^2 - 2BC$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ที่บวกกับเมทริกซ์ A แล้วได้เมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $2A^T$

(2) A^2

(3) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ เมื่อ x , y , z , t เป็นจำนวนจริง

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ข้อความเป็นจริง

(1) $A + X = 2A - X$

(2) $AA^T + 2I_2 + X$

(3) $2A^T A = X - I_3$

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า

(1) $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

(2) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

6. กำหนดให้ a , b เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ 0 และ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $A^n = \underline{0}$

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) เมทริกซ์ B ทั้งหมดที่ทำให้ $AB = \underline{0}$

(2) เมทริกซ์ C ทั้งหมดที่ทำให้ $BC = \underline{0}$

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.6 ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ (Inverse of Matrix)

ก่อนที่จะไปพิจารณาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ในบทต่อไป เราจะมาพิจารณาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะของตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.7 :

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $ad - bc \neq 0$ แล้ว A จะมีตัวผกผันการคูณ แทนด้วย A^{-1} และ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

จากบทนิยามข้างต้น เมทริกซ์ที่จะหาตัวผกผันการคูณได้นั้นจะต้องเป็นเมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) เท่านั้น และเราเรียกเมทริกซ์ที่สามารถหาตัวผกผันการคูณได้ว่า “เมทริกซ์ไม่เอกฐาน” (non-singular matrix) สำหรับเมทริกซ์ที่ไม่สามารถหาตัวผกผันการคูณได้จะเรียกว่า “เมทริกซ์เอกฐาน” (singular matrix)

ตัวอย่างที่ 16 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า A มี A^{-1} ได้หรือไม่ ถ้ามีได้ให้หาด้วย

วิธีทำ ขั้นที่ 1 $ad - bc = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

แสดงว่าสามารถหา A^{-1} ได้

ขั้นที่ 2

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

เพื่อนๆ สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมช่วยคำนวณเกี่ยวกับการตัวผกผันการคูณ ได้ที่

http://www.quickmath.com/webMathematica3/quickmath/page.jsp?s1=matrices&s2=inverse&s3=basic

ตัวอย่างที่ 17 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า A มี A^{-1} ได้หรือไม่ ถ้ามีได้ให้หาด้วย

วิธีทำ ขั้นที่ 1 $ad - bc = (1)(0) - (3)(0) = 0 - 0 = 0$ ซึ่งเท่ากับ 0
แสดงว่าไม่สามารถหา A^{-1} ได้

ขั้นที่ 2 ดังนั้นไม่มีตัวผกผันการคูณ <u>Ans..</u>

สำหรับตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ขนาด 2×2 มีสมบัติที่น่าสนใจหลายประการ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.5 :
กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสและไม่เอกฐานขนาด 2×2 และ
A^{-1} เป็นตัวผกผันการคูณของ A แล้ว

(1) $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$

(2) $(A^{-1})^{-1} = A$

(3) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(5) $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ตัวอย่างที่ 18 จงแสดงว่า B เป็นตัวผกผันการคูณของ A เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ B เป็นตัวผกผันการคูณของ A ก็ต่อเมื่อ $AB = BA = I$ [จาก ทบ.5 ข้อ (1)]

เนื่องจาก $AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+(-9) & (-6)+6 \\ 15+(-15) & (-9)+(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$BA = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+(-9) & 15+(-15) \\ (-6)+6 & (-9)+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น B เป็นตัวผกผันการคูณของ A <u>Ans..</u>

สำหรับเมทริกซ์ A และ B ใดๆ แล้ว $AB \neq BA$ แต่ในกรณีที่ A , B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 และ A หาตัวผกผันการคูณได้แล้ว เราสามารถสรุปได้ว่า $B = A^{-1}$ แล้ว $AB = BA$ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.6 :
กำหนดให้ A , B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 2×2 และ A มีตัวผกผันการคูณ จะได้ว่า ถ้า $B = A^{-1}$ แล้ว $AB = BA$

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงยกตัวอย่างเมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix) มาอย่างน้อย 3 ตัวอย่าง
2. จงหาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (4) $D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

(5) $E = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ (6) $F = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. จงหาเมทริกซ์ A ที่มีขนาด 2×2 ทั้งหมด ซึ่ง $A^2 = \underline{0}$

4. จงหาเมทริกซ์ A ที่มีขนาด 2×2 ทั้งหมด ซึ่ง $A^2 = I_2$

5. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 โดยที่

$A + B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $3A + 3B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} และ B^{-1}

6. จงหา A และ B เมื่อกำหนดว่า

$A^{-1} + B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ และ $2A^{1} - B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$