บทที่ 2

ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant)

2.1 ดีเทอร์มิแนนท์

ในการนำเมทริกซ์ไปใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาต่างๆ นั้น คงไม่ประสบผลสำเร็จเป็นแน่หากเราขาดเครื่องมือที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง เครื่องมือดังกล่าวนี้ก็คือ “ดีเทอร์มิแนนท์” นั่นเอง

บทนิยาม 2.1 :

ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ใดๆ หมายถึงจำนวนจริงที่มีค่าขึ้นอยู่กับเมทริกซ์นั้น

ก่อนที่จะรู้จักการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ใดๆ จะแนะนำให้รู้จักวิธีการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 1×1 , 2×2 และ 3×3 เสียก่อน

บทนิยาม 2.2 :

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 1×1 , 2×2 และ 3×3

ดีเทอร์มิแนนท์ A เขียนแทนด้วย det(A) หรือ $|A|$ โดยที่

(1) ถ้า $A = [a_{11}]$ จะได้ว่า $\det(A) = a_{11}$

(2) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

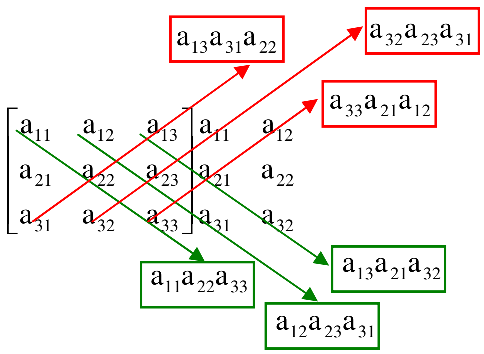
(3) ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(A) = h - k$

เมื่อ $h = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$

$k = a_{13}a_{31}a_{22} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$

จากบทนิยาม 2.2 (3) สังเกตว่าการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 นั้น จะประกอบด้วยจำนวน 2 จำนวนลบกัน สมมติให้เป็น h และ k ซึ่งหาได้ดังนี้

นำหลักที่ 1 และ 2 ของ A มาเขียนต่อหลักที่ 3



เมื่อ ให้ h แทนผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง

$$h = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

และ k แทนผลบวกของผลคูณในแนวเฉียงจากซ้ายล่างขึ้นไปขวาบน

$$k = a_{13}a_{31}a_{22} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

ยิ่งเมทริกซ์มีขนาดใหญ่ขึ้นเท่าไหร่ ก็เป็นการไม่สะดวกในการค่าของดีเทอร์มิแนนท์ ดังนั้น จึงมีการอำนวยความสะดวกในการหาค่าของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่มากๆ ได้อย่างรวดเร็ว

บทนิยาม 2.3 :

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$

(1) ไมเนอร์ (Minor) ของ a_{ij} คือดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เขียนแทนด้วย $M_{ij}(A)$

(2) โคแฟกเตอร์ (Cofactor) ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$ เขียนแทนด้วย $C_{ij}(A)$

และจากบทนิยามนี้เราสามารถนำไปหาดีเทอร์มิแนนท์เมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$

บทนิยาม 2.4 :

กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ดีเทอร์มิแนนท์ของ A คือ

$$a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \ldots + a_{in}C_{in}(A)$$

ตัวอย่างที่ 2.1 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det(A)

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\det(A) &= h - k \\
&= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}) - (a_{13}a_{31}a_{22} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \\
&= (6 + 0 + 6) - (0 - 4 - 9) \\
&= 12 - (-13) \\
&= 12 + 13 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Ans..

ตัวอย่างที่ 2.2 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det(A)

วิธีทำ จากเมทริกซ์ A พบว่าควรเลือกแถวที่ 3 สะดวกที่สุด เนื่องจากมีจำนวนศูนย์มากที่สุด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{31}C_{31}(A) + a_{32}C_{32}(A) + a_{33}C_{33}(A) \\
&= 0C_{31}(A) + (-1)C_{32}(A) + 3C_{33}(A) \\
&= (-1)C_{32}(A) + 3C_{33}(A) \\
&= \left((-1)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right) + \left((3)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}\right) \\
&= ((1)(4+6)) + ((3)(2+3)) \\
&= 10 + 15 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Ans..

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $M_{23}(A)$, $C_{23}(A)$ และ det(A)

วิธีทำ

(1) $M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$= (1 \times (-1)) - (1 \times 0)$

$= -1 - 0$

$= -1$ <u>Ans.</u>.

(2) $C_{23}(A) = (-1)^{2+3} M_{23}(A)$

$= (-1)(-1)$

$= 1$ <u>Ans.</u>.

(3) $\det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A)$

$= \left((1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) + \left((1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right) + \left((2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}\right)$

$= ((1)(6-(-4))) + ((-1)(-9-0)) + ((2)(3-0))$

$= 10 + 9 + 6$

$= 25$ <u>Ans.</u>.

เพื่อนๆ สามารถหาคำตอบโดยใช้โปรแกรมช่วยคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ ได้ที่

http://www.easycalculation.com/matrix/matrix-inverse.php

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(3) $C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(4) $D = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

(5) $E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $M_{13}(A)$, $C_{13}(A)$ และ $\det(A)$

3. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา $M_{31}(B)$, $C_{31}(B)$ และ $\det(B)$

4. จงแสดงว่า $\det(I_3) = 1$

5. จงแสดงว่า $\det(\underline{0}_3) = 0$

2.2 ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์โดยกระจายโคแฟกเตอร์

หัวข้อที่ผ่านมาเราได้หาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่มีขนาด 1×1 , 2×2 และ 3×3 ซึ่งการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดใหญ่ขึ้นจะมีความยุ่งยากกว่านี้อีก และเรายังได้พิจารณาเกี่ยวกับไมเนอร์ซึ่งเป็นดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ใดๆ ออก รวมทั้งโคแฟกเตอร์ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(-1)^{i+j}\ M_{ij}(A)$ ในหัวข้อนี้เราจะนำความรู้ดังกล่าวมาใช้ในการหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 3×3

บทนิยาม 2.5 :

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 3$ จะได้ว่า

(1) การหาดีเทอร์มิแนนท์โดยการกระจายตามแถว :

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + a_{i3}C_{i3}(A) + \ldots + a_{in}C_{in}(A)$$

(2) การหาดีเทอร์มิแนนท์โดยการกระจายตามหลัก :

$$\det(A) = a_{1i}C_{1i}(A) + a_{2i}C_{2i}(A) + a_{3i}C_{3i}(A) + \ldots + a_{ni}C_{ni}(A)$$

เพื่อความรวดเร็วในการคำนวณ อาจใช้การกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถว หรือตามหลักใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นศูนย์จำนวนมาก จะทำให้การคำนวณง่ายและรวดเร็วขึ้น

ตัวอย่างที่ 2.4 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det(A)

วิธีทำ จากเมทริกซ์ A พบว่าการกระจายโคแฟกเตอร์ตามแถวที่ 1 สะดวกที่สุด เนื่องจากมีจำนวนศูนย์มากที่สุด จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) + a_{14}C_{14}(A) \\
&= 2C_{11}(A) + 0C_{12}(A) + 4C_{13}(A) + 0C_{14}(A) \\
&= 2C_{11}(A) + 4C_{13}(A) \\
&= 2(-1)^{1+1}M_{11}(A) + 4(-1)^{1+3}M_{13}(A) \\
&= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 2(25) + 4(-5) \\
&= 50 + (-20) \\
&= 30
\end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 2.5 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & \boxed{0} & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา det(A)

วิธีทำ จากเมทริกซ์ A พบว่าการกระจายโคแฟกเตอร์ตามหลักที่ 2 สะดวกที่สุด เนื่องจากมีจำนวนศูนย์มากที่สุด จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= a_{12}C_{12}(A) + a_{22}C_{22}(A) + a_{32}C_{32}(A) + a_{42}C_{42}(A) \\
&= 0C_{12}(A) + 1C_{22}(A) + (-3)C_{32}(A) + 0C_{42}(A) \\
&= 1C_{22}(A) + (-3)C_{32}(A) \\
&= (-1)^{2+2}M_{22}(A) + (-3)(-1)^{3+2}M_{32}(A) \\
&= \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 12 + 3(6) \\
&= 12 + 18 \\
&= 30
\end{aligned}
$$

<u>Ans.</u>.

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

(3) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 9 & 10 \\ -1 & -3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นค่าคงที่ใดๆ และ det(A) = –6 จงหาค่าของ x

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

2.3 สมบัติของดีเทอร์มิแนนท์

ทฤษฎีบท 2.1 :

กำหนด A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$

(1) ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เป็นศูนย์ทั้งแถว (หรือเป็นศูนย์ทั้งหลัก) แล้ว det(A) = 0

(2) ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีสองแถวใด (สองหลักใด) ที่มีสมาชิกเหมือนกัน แล้ว det(A) = 0

(3) ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการสลับแถวสองแถวใด (สองหลักใด)ของ A แล้ว det(B) = det(A)

(4) ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการทำค่าคงที่ k ไปคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หลักใดหลักหนึ่ง) ของ A แล้ว det(B) = k det(A)

(5) ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการบวกแถวใดแถวหนึ่ง (หลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยพหุคูณของอีกแถวหนึ่ง (อีกหลักหนึ่ง) แล้ว det(B) = det(A)

(6) ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมแล้ว det(A) คือผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

(7) $\det\left(\bar{0}_{n\times n}\right) = 0$

(8) $\det\left(I_n\right) = 1$

(9) $\det(A) = \det(A^T)$

(10) $\det(kA) = k^n \det(A)$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่ใดๆ

(11) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

(12) $\det(A^m) = \left(\det(A)\right)^m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

(13) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ เมื่อ $\det(A) \neq 0$

ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้า $A = \begin{bmatrix} -3 & a^2 \\ a & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\det(AB^T) = -132$

แล้ว det(A+B) เป็นเท่าใด

วิธีทำ จากโจทย์ทราบว่า $\det(AB^T) = -132$

จากทฤษฎีบททราบว่า $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ และ $\det(A) = \det(A^T)$

แสดงว่า $\det(AB^T) = \det(A)\det(B^T)$ และ $\det(B) = \det(B^T)$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(AB^T) &= \det(A)\det(B^T) \\
-132 &= \det(A)\det(B) \\
-132 &= \left(-3-a^3\right)(12-0) \\
-132 &= \left(-3-a^3\right)(12) \\
\frac{-132}{12} &= -3-a^3 \\
-11+3 &= -a^3 \\
-8 &= -a^3
\end{aligned}$$

เอา -1 คูณทั้งสองข้าง

$$8 = a^3$$

ฉะนั้น $a = 2$

ดังนั้น $A + B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
\det(A+B) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 4-6 \\
&= -2
\end{aligned}$$

<u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 2.3

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง และ $\det(A + A^T) = -9$ แล้ว $\det(2A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

2.4 การหาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์

การหาตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ A ที่มีมิติ $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ ก่อนอื่นเราจะต้องเข้าใจคำศัพท์บางตัวเสียก่อน ดังนี้

บทนิยาม 2.6 :
กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ เมทริกซ์ผูกพัน (adjoint matrix) คือ การสลับย้ายของเมทริกซ์ของโคเฟกเตอร์ของเมทริกซ์ A คือ $[C_{ij}(A)]^T$
เขียนแทนเมทริกซ์ผูกพันของ A ด้วย adj(A)

ตัวอย่างที่ 2.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^T$$

$$C_{11}(A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -8+10 = 2$$

$$C_{12}(A) = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(24+4) = -28$$

$$C_{13}(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+2 = 17$$

$$C_{21}(A) = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = -(0+5) = -5$$

$$C_{22}(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8+2 = 10$$

$$C_{23}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -(5-0) = -5$$

$$C_{31}(A) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0\text{-}1 = -1$$

$$C_{32}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) = -1$$

$$C_{33}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1\text{-}0 = -1$$

เพราะฉะนั้น $\text{adj}(A) = \left[C_{ij}(A)\right]^T$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -28 & 17 \\ -5 & 10 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & -1 \\ 17 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$ Ans..

บทนิยาม 2.7 :

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

ตัวอย่างที่ 2.8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} (ถ้ามี)

วิธีทำ เนื่องจาก det(A) = (-8+0-24)-(32+0+6) = -70 (ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์)

แสดงว่ามี A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$$

$$= \frac{1}{-70}\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{-70}\begin{bmatrix} -8 & -3 & -14 \\ 10 & -5 & 0 \\ -32 & -12 & 14 \end{bmatrix}^{T}$$

$$= \frac{1}{-70}\begin{bmatrix} -8 & 10 & -32 \\ -3 & -5 & -12 \\ -14 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$ Ans..

หรือ $$= \begin{bmatrix} \frac{4}{35} & -\frac{2}{7} & \frac{16}{35} \\ \frac{3}{70} & \frac{1}{14} & \frac{6}{35} \\ \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$ Ans..

ตัวอย่างที่ 2.9 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} (ถ้ามี)

วิธีทำ เนื่องจาก det(A) = 1 (ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์) แสดงว่ามี A^{-1}

หา $C_{ij}(A)$ ทุก i และ j จะได้

$$C_{11}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{12}(A) = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{13}(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{14}(A) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21}(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{22}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{23}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{24}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31}(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{32}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{33}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{34}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{41}(A) = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad C_{42}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{43}(A) = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{44}(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Ans..

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหา adj(A) เมื่อ A คือเมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 1 & 12 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 10 & -5 & 5 \\ 30 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

2. จงหา A^{-1} (ถ้ามี) เมื่อกำหนด A คือเมทริกซ์ต่อไปนี้

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้เมทริกซ์ต่อไปนี้มีตัวผกผัน

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 2 & 8 & x \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} x & -1 & x \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$