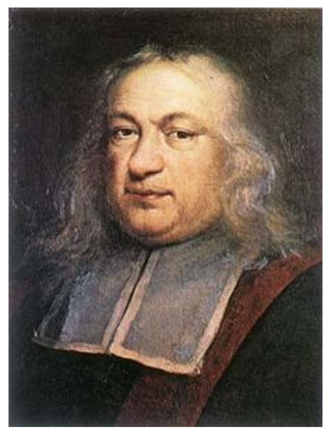
บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

(Introduction to Analytic Geometry)

เรขาคณิตวิเคราะห์ เป็นสาขาหนึ่งของคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นการเชื่อมโยงความรู้ระหว่างพีชคณิตและเรขาคณิตเข้าด้วยกัน ซึ่งเรอเน เดอการ์ตส์ (Rene De Cartes) และปีแอร์ เดอ แฟร์มาต์ (Pierre De Fermat) เป็นผู้วางรากฐานเอาไว้

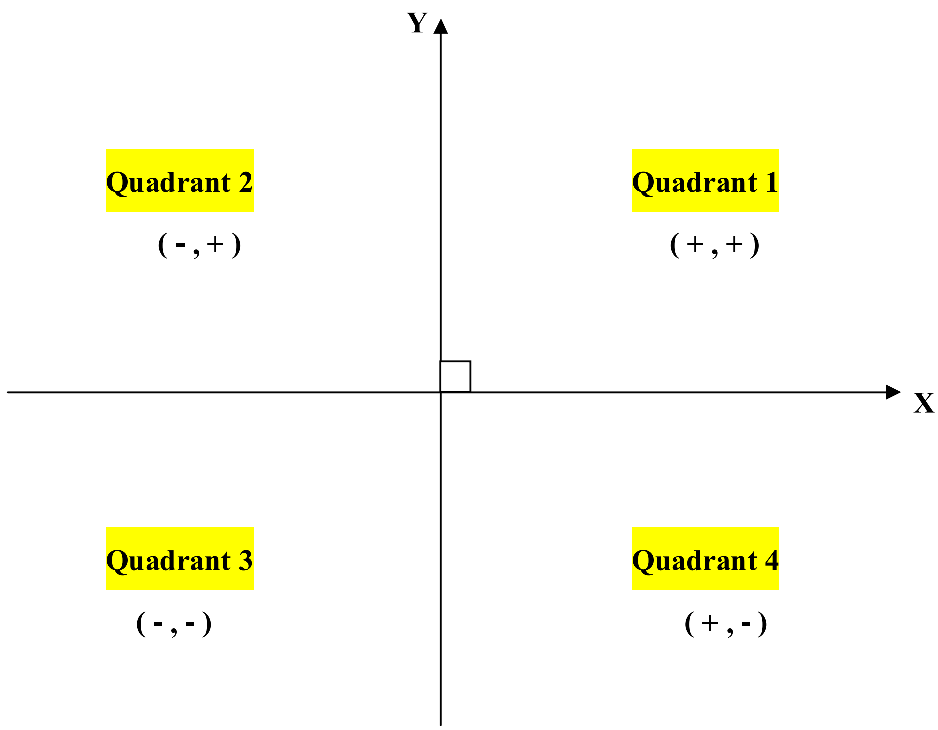


เรอเน เดอการ์ตส์ (Rene De Cartes) และ**ปีแอร์ เดอ แฟร์มาต์** (Pierre De Fermat)
สองนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส ผู้วางรากฐานเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

ในการศึกษาเรื่องเรขาคณิตวิเคราะห์ เราจะทำการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติของจุด และเส้นตรง โดยอ้างอิงกับระบบพิกัดฉากเป็นหลัก ดังต่อไปนี้

1.1 ระบบพิกัดฉาก (Rectangular Co-ordinate System)

ระบบพิกัดฉาก ประกอบด้วย แกนพิกัดฉาก 2 แกน ได้แก่ เส้นจำนวนที่อยู่บนแกนนอน (แกน X) และเส้นจำนวนที่อยู่บนแกนตั้ง (แกน Y) แกนพิกัดฉากทั้งสองนี้จะแบ่งพื้นระนาบออกเป็น 4 ส่วน เรียกพื้นที่ที่ถูกแบ่งออกเป็นส่วนๆ นี้ว่า "ควอดรันต์" (Quadrant) ซึ่งมีลักษณะดังรูป



แกน X และ แกน Y ตัดกันเป็นมุมฉาก เรียกจุดนี้ว่า "จุดกำเนิด" (**Origin**) คือ (0 , 0) และเขียนแทนตำแหน่งของจุดบนระบบพิกัดฉากด้วย (X, Y) เมื่อ

(1) **Ordinate** คือ ค่าตามแกน Y

(2) **Abscissa** คือ ค่าตามแกน X

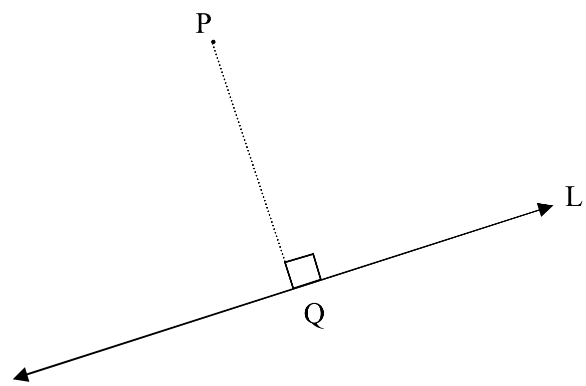
(3) จุด **Co-ordinate** คือ (X,Y)

(4) จุดทุกจุดบนแกน X มี **Co-ordinate** เป็น (a , 0) เมื่อ $a \in R$

(5) จุดทุกจุดบนแกน Y มี **Co-ordinate** เป็น (0 , a) เมื่อ $a \in R$

1.2 โปรเจคชัน (Projection)

กำหนดให้ P เป็นจุด และ L เป็นเส้นตรง โปรเจคชันของ P บนเส้นตรง L เขียนแทนด้วย $\mathrm{Proj}_L(P)$ คือ จุด Q ที่ทำให้ส่วนของเส้นตรง PQ ตั้งฉากกับ L ดังรูป

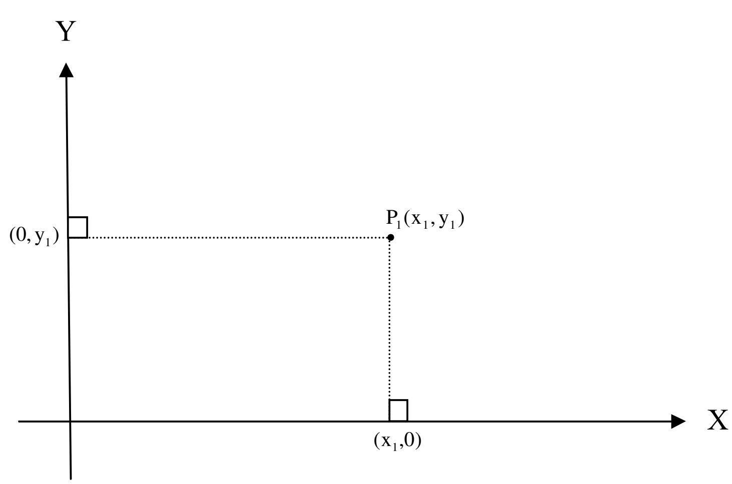


ข้อสังเกต

(1) เราอาจกล่าวได้ว่า โปรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L คือ จุดบนเส้นตรง L ที่ทำให้ระยะทางจากจุด P ไปยังจุดนั้นสั้นที่สุด

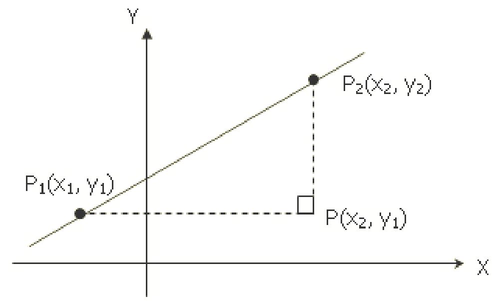
(2) โปรเจคชันของจุด $P_1(x_1, y_1)$ บนแกน X คือจุด $(x_1, 0)$

(3) โปรเจคชันของจุด $P_1(x_1, y_1)$ บนแกน Y คือจุด $(0, y_1)$



1.3 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

พิจารณารูปต่อไปนี้



บนเส้นจำนวน ถ้าจุด P_1 แทนจำนวนจริง x_1 และ P_2 แทนจำนวนจริง x_2 ระยะทางระหว่างจุด P_1 และจุด P_2 คือค่าสัมบูรณ์ของ $x_1 - x_2$ เขียนแทนด้วย P_1P_2 หรือ $|P_1P_2|$

จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส จะได้ว่า

$$|P_1P_2| = \sqrt{(P_1P)^2 + (P_2P)^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.1 :

ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดสองจุดใดๆ ในระนาบ

ระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เขียนแทนด้วย $|P_1P_2|$ ซึ่ง

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ข้อสังเกต

ถ้าเส้นตรงขนานแกน X อาจใช้สูตร $|P_1P_2| = |x_1 - x_2|$

ถ้าเส้นตรงขนานแกน Y อาจใช้สูตร $|P_1P_2| = |y_1 - y_2|$

ตัวอย่างที่ 1.1 กำหนดให้ $P_1(1,6)$ และ $P_2(-4,2)$ จงหาระยะทางระหว่างจุด P_1 และ P_2

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2| &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
&= \sqrt{(1-(-4))^2+(6-2)^2} \\
&= \sqrt{(5)^2+(4)^2} \\
&= \sqrt{25+16} \\
&= \sqrt{51} \\
&\approx 7.1414 \text{ หน่วย}
\end{aligned}
$$

Ans..

ตัวอย่างที่ 1.2 จงหาจุดบนแกน X ที่อยู่ห่างจากจุด (-4,3) และ (3,-4) เป็นระยะทางเท่ากัน

วิธีทำ ให้จุดบนแกน X คือ (x,0)

ระยะทางระหว่าง (x,0) ถึง(-4,3) = ระยะทางระหว่าง (x,0) ถึง (3,-4)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} &= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \\
\sqrt{(x-(-4))^2+(0-3)^2} &= \sqrt{(x-3)^2+(0-(-4))^2}
\end{aligned}
$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$
\begin{aligned}
(x+4)^2+(-3)^2 &= (x-3)^2+(4)^2 \\
x^2+8x+16+9 &= x^2-6x+9+16 \\
8x+6x &= 0 \\
14x &= 0 \\
x &= \frac{0}{14} \\
x &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ จุด (0,0) เป็นจุดบนแกน X ที่อยู่ห่างจากจุด (-4,3) และ (3,-4) เป็นระยะทางเท่ากัน Ans..

ไม่ยากเลยใช่ไหมครับเพื่อนๆ อยากเก่งต้องทำบ่อยๆ
และถ้าไม่เข้าใจต้องไปถามคุณครูนะครับ

ตัวอย่างที่ 1.3 กำหนดจุด $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$, $B\left(2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\right)$ และ $C\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$ จงแสดงว่า ABC เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมด้านเท่า

วิธีทำ

$$|AB| = \sqrt{\left(1-2-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}-2-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2+\left(-1+\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(1+2\sqrt{3}+3\right)+\left(3-2\sqrt{3}+1\right)}$$
$$= \sqrt{8} \text{ หน่วย}$$

$$|BC| = \sqrt{\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2+\left(2+\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+4}$$
$$= \sqrt{8} \text{ หน่วย}$$

$$|AC| = \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2+\left(1+\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(1-2\sqrt{3}+3\right)+\left(1+2\sqrt{3}+3\right)}$$
$$= \sqrt{8} \text{ หน่วย}$$

เห็นว่า $|AB| = |BC| = |AC|$ แสดงว่า ΔABC มีด้านยาวเท่ากันทั้งสามด้าน

$\therefore$ ΔABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า Ans..

การหาว่าจุด 3 จุด อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

A B C

A , B และ C จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันก็ต่อเมื่อ $|AB| + |BC| = |AC|$

ตัวอย่างที่ 1.4 จงแสดงว่า A(1,1) , B(-2,0) และ C(4,2) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ

$|AB| = \sqrt{(1+2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{9+1}$

$= \sqrt{10}$ หน่วย

$|BC| = \sqrt{(-2-4)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

$= \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$ หน่วย

$|AC| = \sqrt{(1-4)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1}$

$= \sqrt{10}$ หน่วย

เห็นว่า $|AB| + |AC| = |BC|$ ซึ่งมี A เป็นจุดร่วม

$\therefore$ จุด 3 จุดนี้จึงอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.5 ถ้าระยะห่างระหว่างจุด (k,1) และ (-2,1) เป็น 3 หน่วย จงหาค่า k

วิธีทำ

จาก $|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$3 = \sqrt{(k-(-2))^2 + (1-1)^2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$9 = (k+2)^2 + (0)^2$$

$$k^2 + 4k + 4 = 9$$

$$k^2 + 4k + 4 - 9 = 0$$

$$k^2 + 4k - 5 = 0$$

$$(k+5)(k-1) = 0$$

$$k = -5 , 1$$

$\therefore k = -5 , 1$ <u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดต่อไปนี้กับจุดกำเนิด

   (1) (3,4)

   (2) (0,3)

   (3) (-1,-3)

   (4) (a,b)

2. จงหาระยะทางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

   (1) (2,5) และ (9,5)

   (2) (-4,7) และ (6,7)

   (3) (-5,6) และ (-5,-3)

   (4) (-4,-8) และ (-4,-2)

   (5) (3,4) และ (2,2)

   (6) (-1,-2) และ (3,-4)

   (7) (2,13) และ (8,5)

   (8) (-5,3) และ (0,8)

   (9) (-6,4) และ (-6,17)

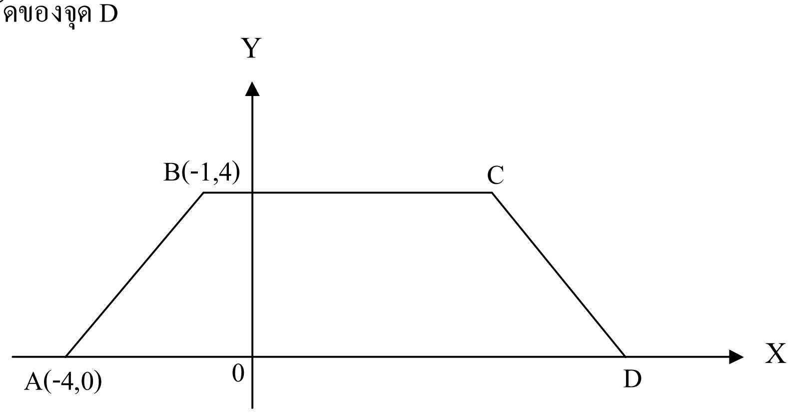
   (10)(-2,-1) และ (-7,-6)

3. ABC เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูดังรูป โดยที่ BC ยาว 8 หน่วย ถ้าจุด A มีพิกัดเป็น (-4,0) จุด B มีพิกัดเป็น (-1,4) และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูนี้เท่ากับ 48 ตารางหน่วย จงหา

   (1) พิกัดของจุด C

   (2) ความยาวของเส้นของเส้นตรง AB

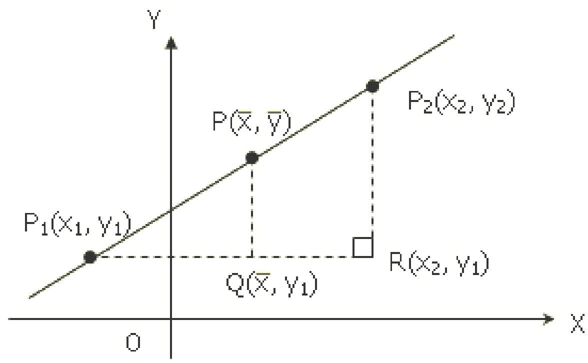
   (3) พิกัดของจุด D



4. จงแสดงว่า (1,1) , (-1,-1) และ (-4,2) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก
5. จงหาระยะห่างระหว่างจุด (-3,-4) กับแกน X
6. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่ง A มีพิกัดเป็น (3,4) B มีพิกัดเป็น (7,8) และ C มีพิกัดเป็น (-1,-2)
7. จงหาจุดซึ่งอยู่บนแกน Y และอยู่ห่างจากจุด (2,5) และ (3,-7) เป็นระยะทางเท่ากัน
8. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด (6,8) , (4,6) และ (-2,-2) เป็นจุดยอด สามเหลี่ยมรูปนี้เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วหรือไม่
9. รูปวงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (-3,2) และผ่านจุด (7,4) จงหาความยาวของรัศมีวงกลมนี้
10. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด (10,0) , (-12,0) และ (8,-8) เป็นจุดยอด จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้
11. จุด (0,0) , (8,18) และ (12,27) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่
12. จงบอกเงื่อนไขที่ทำให้ P_1, P_2 และ P_3 ใดๆ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
13. รูปวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (3,4) และผ่านจุด (6,8) จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้และตรวจสอบดูว่าจุด (0,0) อยู่บนวงกลมนี้หรือไม่
14. รูปวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด (4,-3) และมีแกน X เป็นเส้นสัมผัส จงหาจุดสัมผัส

1.4 จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ให้ $P(\bar{x},\bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$ เราสามารถหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$ โดยพิจารณารูปต่อไปนี้



ให้ $\overline{P_1R}$ เป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ตั้งฉากกับ $\overline{PQ}$ และ $\overline{P_2R}$ ซึ่งเป็นส่วนของเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y ที่จุด Q และ R ตามลำดับ

จะได้ จุด Q มีพิกัดเป็น $(\bar{x}, y_1)$

จุด R มีพิกัดเป็น (x_2, y_1)

และ ΔP_1QP คล้ายกับ ΔP_1RP_2

จะได้ $\frac{P_1Q}{P_1R} = \frac{P_1P}{P_1P_2}$

แต่ $P(\bar{x},\bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$

จะได้ $\frac{P_1P}{P_1P_2} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $\frac{P_1Q}{P_1R} = \frac{1}{2}$

$P_1Q = \frac{1}{2}P_1R$

จะได้ $P_1Q = QR$

หรือ $|\bar{x} - x_1| = |x_2 - \bar{x}|$

เนื่องจาก $\overline{x}$ อยู่ระหว่าง x_1และ x_2 ดังนั้น $x_1 < \overline{x} < x_2$ หรือ $x_2 < \overline{x} < x_1$ เพราะฉะนั้น $\overline{x} - x_1$ และ $x_2 - \overline{x}$ จะเป็นจำนวนเต็มบวกเหมือนกัน หรือเป็นจำนวนเต็มลบเหมือนกัน

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\overline{x} - x_1 &= x_2 - \overline{x} \\
\overline{x} + \overline{x} &= x_2 + x_1 \\
2\overline{x} &= x_1 + x_2 \\
\overline{x} &= \frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงให้เห็นว่า

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ดังนั้น จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1.2 :

ถ้าจุด $P(\overline{x}, \overline{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้ว

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.6 จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A(2,4) และ B(-4,0)

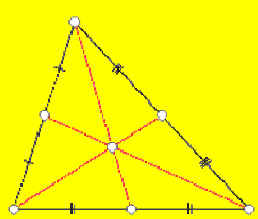
วิธีทำ ให้ $P(\bar{x},\bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางตามที่ต้องการ

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+(-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ จุดกึ่งกลาง คือ (-1,2) Ans..

เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยม :



หมายถึง เส้นตรงที่ลากจากมุมยอดไปแบ่งครึ่งฐานของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะมีทั้งหมด 3 เส้น และพบกันที่จุดจุดหนึ่งเสมอ เรียกว่า จุด Centroid หรือ จุดรวมมวล

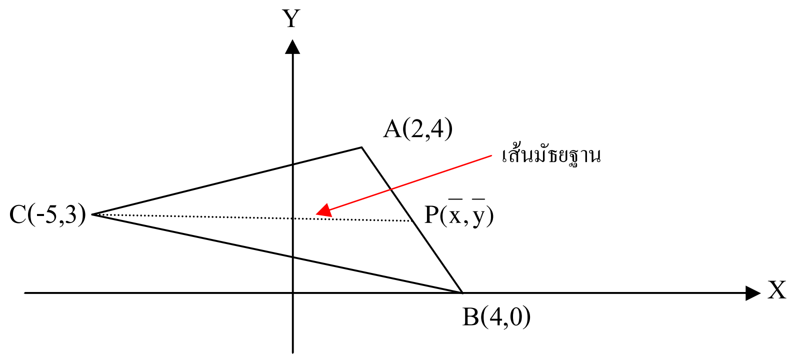
ซึ่งหาจุดนี้ได้โดยใช้สูตร

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

ตัวอย่างที่ 1.7 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดเป็น (-5,3) , (2,4) และ (4,0) จงหาจุดปลายและความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด (-5,3) มายังฐานซึ่งเกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุด (2,4) และ (4,0)

วิธีทำ



ให้ P($\bar{x},\bar{y}$) เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$\therefore$ จุดปลายของเส้นมัธยฐาน คือ (3,2) <u>Ans..</u>

ความยาวของเส้นมัธยฐาน $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

$= \sqrt{(-5-3)^2 + (3-2)^2}$

$= \sqrt{(-8)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{64+1}$

$= \sqrt{65}$ หน่วย

$\therefore$ เส้นมัธยฐานยาว $\sqrt{65}$ หน่วย <u>Ans..</u>

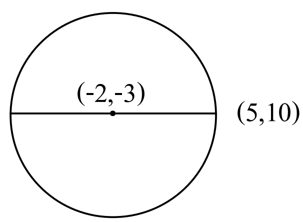
ตัวอย่างที่ 1.8 จุด $P(\bar{x},\bar{y})$ เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{P_1P_2}$ พิกัดของจุด P และ P_1 คือ (2,3) และ (5,4) ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด P_2

วิธีทำ

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
\bar{x} & = & \dfrac{x_1+x_2}{2} & \bar{y} & = & \dfrac{y_1+y_2}{2} \\
2 & = & \dfrac{5+x_2}{2} & 3 & = & \dfrac{4+y_2}{2} \\
4 & = & 5+x_2 & 6 & = & 4+y_2 \\
4-5 & = & x_2 & 6-4 & = & y_2 \\
x_2 & = & -1 & y_2 & = & 2
\end{array}
$$

$\therefore$ (-1,2) เป็นพิกัดของจุด P_2 Ans..

ตัวอย่างที่ 1.9 วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง (-2,-3) จุดปลายเส้นผ่านศูนย์กลางข้างหนึ่ง คือ (5,10) จงหาพิกัดของจุดปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง



วิธีทำ

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
\bar{x} & = & \dfrac{x_1+x_2}{2} & \bar{y} & = & \dfrac{y_1+y_2}{2} \\
-2 & = & \dfrac{5+x_2}{2} & -3 & = & \dfrac{10+y_2}{2} \\
-4 & = & 5+x_2 & -6 & = & 10+y_2 \\
-4-5 & = & x_2 & -6-10 & = & y_2 \\
x_2 & = & -9 & y_2 & = & -16
\end{array}
$$

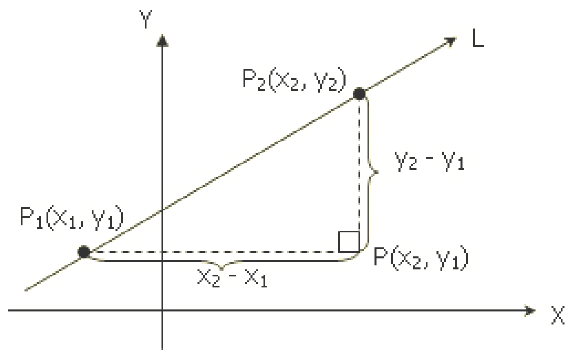
$\therefore$ พิกัดของจุดปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมนี้ คือ (-9,-16) Ans..

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้
   (1) (-1,-3) และ (5,3)
   (2) (-3,-2) และ (-1,-1)
   (3) $(\frac{1}{2},2)$ และ (3,-1)
   (4) $(3,-\frac{5}{2})$ และ (-3,-9)
2. จุด P เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB จงหาพิกัดของจุด P ถ้า
   (1) P มีพิกัดเป็น (1,2) และ B มีพิกัดเป็น (3,4)
   (2) P มีพิกัดเป็น (5,6) และ B มีพิกัดเป็น (15,-4)
3. สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดเป็น A(2,6) , B(4,-4) และ C(-2,3) จงหาความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด C ไปยังด้านตรงข้าม
4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง (-4,1) จุดปลายข้างหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ (2,6) จงหาพิกัดของจุดปลายอีกข้างหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง
5. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง (3,2) คอร์ดยาว 8 หน่วยและจุดกึ่งกลางคอร์ดเป็น (5,3) จงหารัศมีของวงกลมวงนี้
6. วงกลมวงหนึ่งมีจุด (2,3) เป็นโปรเจคชันของจุดศูนย์กลางบนคอร์ด ซึ่งมีจุดปลายข้างหนึ่งเป็น (-1,-4) จงหาจุดปลายอีกข้างหนึ่ง

1.5 ความชันของเส้นตรง

คือ ลักษณะของเส้นตรงในระนาบแกนมุมฉาก ซึ่งลักษณะเหล่านี้จะบอกให้รู้ว่าเส้นตรงนี้ทำมุมแหลมหรือมุมป้านกับแกน X หรือขนานแกน X , Y



จากรูป สามารถสรุปเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 1.1 :

ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$

m เป็นความชันของเส้นตรง L ก็ต่อเมื่อ

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

ข้อสังเกต

(1) ถ้า $x_1 = x_2$ เส้นตรงจะขนานกับแกน Y ถือว่าหาความชันไม่ได้

(2) ความชันของเส้นตรงที่ขนานแกน X คือ 0

(3) ถ้าความชันมีค่าเป็นบวก หรือมากกว่าศูนย์ เส้นตรงจะทำมุมแหลมกับแกน X เมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา

(4) ถ้าความชันมีค่าเป็นลบ หรือน้อยกว่าศูนย์ เส้นตรงจะทำมุมป้านกับแกน X เมื่อวัดทวนเข็มนาฬิกา

เราสามารถนำเอาบทนิยามของความชันที่กล่าวมาข้างต้นไปใช้ในการอธิบายคุณสมบัติของเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันและตั้งฉากกันได้ดังนี้

(1) เส้นขนาน

ทฤษฎีบท 1.3 :
เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานแกน Y จะขนานกัน ก็ต่อเมื่อ
ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน

(2) เส้นตั้งฉาก

ทฤษฎีบท 1.4 :
เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานแกน Y จะตั้งฉากกัน ก็ต่อเมื่อ
ผลคูณความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1

ตัวอย่างที่ 1.10 จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้

(1) ผ่านจุดกำเนิด และ (4,-2)

(2) ผ่านจุด (a+b , a) และ (b , a-b)

วิธีทำ (1) ผ่านจุดกำเนิด และ (4,-2)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{0-(-2)}{0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$ Ans..

(2) ผ่านจุด (a+b , a) และ (b , a-b)

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{a-(a+b)}{(a+b)-b} = \frac{a-a-b}{a+b-b} = \frac{b}{a}$$ Ans..

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดจุด $A(x_1,4)$ และ $B(3,-4)$ เป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็น -1 จงหาค่าของ x_1

วิธีทำ

$$m \text{ ของ } AB = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$-1 = \frac{4-(-4)}{x_1 - 3}$$

$$(-1)(x_1 - 3) = 8$$

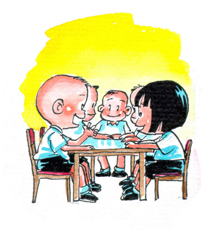
$$-x_1 + 3 = 8$$

$$-x_1 = 8 - 3$$

$$-x_1 = 5$$

$$x_1 = -5$$

$\therefore\ x_1 = -5$ Ans..



สิ่งที่น่าสรรเสริญที่สุดในชีวิตของเราก็คือ
ความวิริยะ อุตสาหะ

ตัวอย่างที่ 1.12 จงแสดงว่าเส้นตรงที่ผ่านจุด A(0,4) และ B(3,1) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C(-1,-2) และ D(-4,1)

วิธีทำ

$$m \text{ ของ } AB = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4-1}{0-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$m \text{ ของ } CD = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2-1}{1-(-4)} = \frac{-3}{3} = -1$$

เห็นว่า m ของ AB = m ของ CD แสดงว่าเส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน

$\therefore$ เส้นตรงที่ผ่านจุด A และ B ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C และ D Ans..

ตัวอย่างที่ 1.13 จงแสดงว่าจุด A(-4,3) , B(-1,2) และ C(2,11) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ

$$m \text{ ของ } AB = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3-2}{-4-(-1)} = \frac{1}{-3}$$

$$m \text{ ของ } BC = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-11}{-1-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$m \text{ ของ } AD = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{3-11}{-4-2} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

เห็นว่า ผลคุณของ m ของ AB และ m ของ BC เท่ากับ -1

นั่นคือ ด้าน AB ตั้งฉากกับด้าน BC

$\therefore$ จุดทั้งสามเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก Ans..

ตัวอย่างที่ 1.14 จงแสดงว่าจุด A(-1,-2) , B(0,1) , C(-3,2) และ D(-4,-1) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมด้านขนาน

วิธีทำ

$$m \text{ ของ } AB = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2-1}{-1-0} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$m \text{ ของ } BC = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1-2}{0-(-3)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$m \text{ ของ } CD = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{2-(-1)}{-3-(-4)} = \frac{3}{1} = 3$$

$$m \text{ ของ } AD = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-2-(-1)}{-1-(-4)} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

เห็นว่า m ของ AB = m ของ CD และ m ของ BC = m ของ AD

นั่นคือ มีด้านขนานกันสองคู่

$\therefore$ จุดทั้งสี่เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน Ans..

ตัวอย่างที่ 1.15 ถ้าจุด A(3,-1) , B(6,1) และ C(-3,k) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันแล้ว จงหาค่า k

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\text{m ของ AB} = \text{m ของ BC}$$
$$\frac{-1-1}{3-6} = \frac{1-k}{6-(-3)}$$
$$\frac{-2}{-3} = \frac{1-k}{9}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{1-k}{9}$$
$$\frac{2}{3}\times 9 = 1-k$$
$$6 = 1-k$$
$$k = 1-6$$
$$k = -5$$

$\therefore\ k = -5$ <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.16 เส้นตรงที่ผ่านจุด A(-3,-1) , B(2,3) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด C(-4,-5) , D(k,3) จงหาค่า k

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\text{m ของ AB} = \text{m ของ CD}$$
$$\frac{-1-3}{-3-2} = \frac{-5-3}{-4-k}$$
$$\frac{-4}{-5} = \frac{-8}{-4-k}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{-8}{-4-k}$$
$$4\times(-4-k) = (-8)\times 5$$
$$-16-4k = -40$$
$$-4k = -40+16$$
$$-4k = -24$$
$$k = \frac{-24}{-4}$$
$$k = 6$$

$\therefore\ k = 6$ <u>Ans..</u>

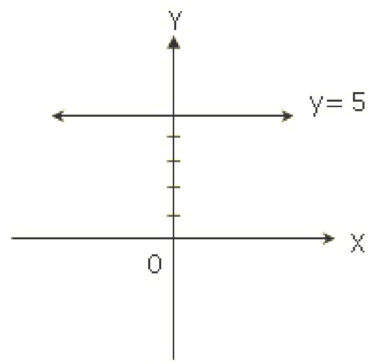
แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้
   (1) (0,0) และ (2,6)
   (2) (0,0) และ (-2,6)
   (3) (5,3) และ (12,7)
   (4) (3,-8) และ (-5,7)
   (5) (t+1 , s) และ (2t , s-3)
2. จงหาค่า x ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q มีความชันเท่ากับ m ตามที่กำหนดให้
   (1) P(5,2) และ Q(x,6) เมื่อ m = 4
   (2) P(4,x) และ Q(-3,1) เมื่อ $m = \frac{1}{2}$
   (3) P(6,-3) และ Q(9,x) เมื่อ $m = -\frac{2}{3}$
   (4) P(x,12) และ Q(5,12) เมื่อ m = 0
   (5) P(1,x) และ Q(4,3) เมื่อ $m = \frac{4}{3}$
3. จงหาค่า k ที่ทำให้เส้นตรงที่เชื่อมจุด (1,k) และ (k,-2) มีความชันเป็น 4
4. จงหาความชันและความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุด A(2,10) , B(5,7) และ C(5,7) เป็นจุดยอด
5. จงแสดงว่าเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-2,-4) และ (3,3) ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1,-2) และ (6,5)
6. ถ้าเส้นตรงผ่านจุด (k,7) และ (-3,2) ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,2) และ (1,-4) จงหาค่า k
7. จุด (1,2) , (6,7) และ (-3,4) อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
8. จงหาค่า k ที่ทำให้ (k,6) , (1,4) และ (-4,2) อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
9. จงแสดงว่า A(-4,2) , B(2,6) , C(1,0) และ D(-2,-2) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมคางหมู
10. ถ้าความชันของเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้วเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง L จะมีความชันเท่าไร
11. เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (4,3) และ (-3,-5) ตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-2,-3) และ (-8,2) หรือไม่
12. เส้นตรงซึ่งผ่านจุด (k,7) และ (-3,-2) ตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (3,2) และ (1,-4) จงหาค่า k
13. จงแสดงว่า (2,1) , (6,4) , (3,8) และ (-1,5) เป็นจุดยอดของสี่เหลี่ยมจัตุรัส และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม

1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

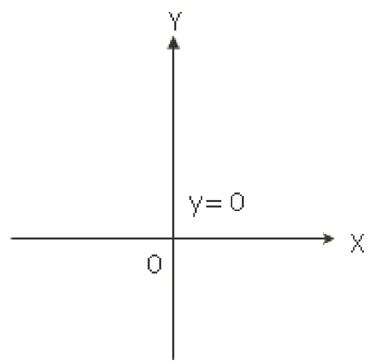
1.6.1 รูปแบบของเส้นตรงที่ขนานกับแกน X มีรูปแบบเป็น $y = b$ เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

- ถ้า b มากกว่า 0 เส้นตรงจะอยู่เหนือแกน X



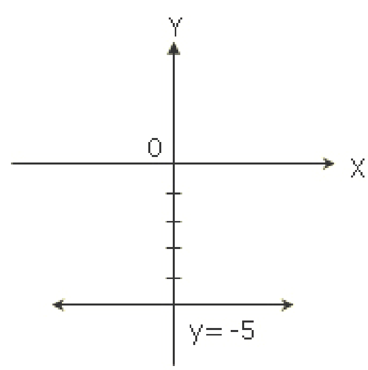
(1)

- ถ้า b เท่ากับ 0 เส้นตรงจะทับแกน X



(2)

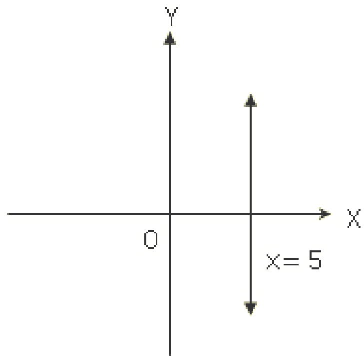
- ถ้า b น้อยกว่า 0 เส้นตรงจะอยู่ใต้แกน X



(3)

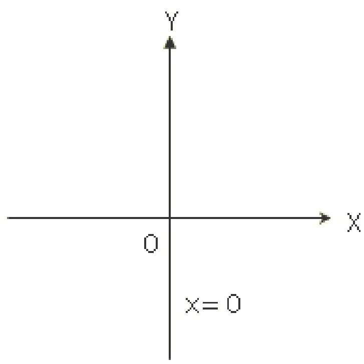
1.6.2 รูปแบบของเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y มีรูปแบบเป็น x = a เมื่อ b เป็นค่าคงตัว

- ถ้า a มากกว่า 0 เส้นตรงจะอยู่ขวาแกน Y



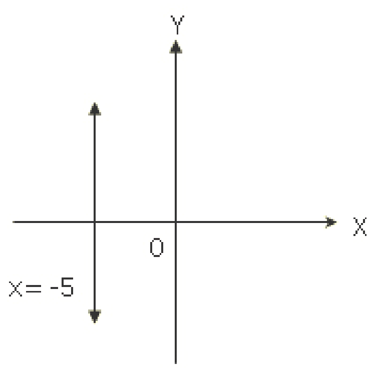
(1)

- ถ้า a เท่ากับ 0 เส้นตรงจะทับแกน Y



(2)

- ถ้า a น้อยกว่า 0 เส้นตรงจะอยู่ซ้ายแกน Y



(3)

1.6.3 รูปแบบของเส้นตรงที่ไม่ขนานแกน X และแกน Y ซึ่งอยู่ในรูปทั่วไปคือ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A , B และ C เป็นค่าคงตัว และ A , B ไม่เท่ากับศูนย์พร้อมกัน

รูปแบบนี้หาความชันได้โดยใช้สูตร $m = \frac{-A}{B}$

ตัวอย่างที่ 1.17 จงหาความชันจากสมการเส้นตรง $2x - 3y + 5 = 0$

$\therefore \quad m = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ <u>Ans..</u>

1.6.4 รูปแบบของเส้นตรงที่อยู่ในรูป y = Ax + B

- ค่า A คือ ความชันของเส้นตรง
- ค่า B คือ จุดตัดบนแกน Y ซึ่งคือจุด (0,B)

ตัวอย่างที่ 1.18 จงหาความชัน และจุดตัดบนแกน Y จากสมการเส้นตรง $y = 5x + 3$

$\therefore \quad m = 5$

ตัดแกน Y ที่จุด (0,3) <u>Ans..</u>

1.6.5 รูปแบบของเส้นตรงที่อยู่ในรูป Point Slope Form คือจะบอกจุดที่เส้นตรงผ่าน และบอกความความชันของเส้นตรงมาให้ เราสามารถหาสมการเส้นตรงนี้ได้โดยใช้สูตร

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

1.6.6 รูปแบบของเส้นตรงที่อยู่ในรูป Two Point Form คือจะบอกจุดที่เส้นตรงผ่านมาให้ 2 จุด คือ (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เราสามารถหาสมการเส้นตรงนี้ได้โดยใช้สูตร

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

1.6.7 รูปแบบของเส้นตรงที่อยู่ในรูป Intercept Form คือบอกจุดตัดบนแกน X และจุดตัดบนแกน Y มาให้ เราสามารถหาสมการเส้นตรงนี้ได้โดยใช้สูตร

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เมื่อเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (a,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,b)

ตัวอย่างที่ 1.19 จงแสดงว่าเส้นตรง $x = 2y + 4$ ขนานกับเส้นตรง $y = \frac{x}{2} + 2$

วิธีทำ จากเส้นตรง $L_1 : x - 2y + 4 = 0$ $m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

จากเส้นตรง $L_2 : y = \frac{x}{2} + 2$ $m_2 = \frac{1}{2}$

เห็นว่า $m_1 = m_2$

$\therefore$ เส้นตรงสองเส้นนี้ขนานกัน Ans..

ตัวอย่างที่ 1.20 จงแสดงว่าเส้นตรง $3x + 2y = 8$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $4x - 6y = 3$

วิธีทำ จากเส้นตรง $L_1 : 3x + 2y - 8 = 0$ $m_1 = \frac{-A}{B} = \frac{-3}{2}$

จากเส้นตรง $L_2 : 4x - 6y - 3 = 0$ $m_2 = \frac{-A}{B} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}$

เห็นว่า $m_1 \times m_2 = -1$

$\therefore$ เส้นตรงสองเส้นนี้ตั้งฉากกัน Ans..

การเรียนแม้เหนื่อยยาก
ยอมลำบากอย่าท้อถอย
สุดทางที่รอคอย
คืออนาคตอันงดงาม

ตัวอย่างที่ 1.21 จากสมการเส้นตรง $\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}y-6=0$

จงบอกความชันและจุดตัดบนแกน X และแกน Y

วิธีทำ หาความชันโดยใช้สูตร $m=\frac{-A}{B}=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$ <u>Ans..</u>

หาจุดตัดบนแกน X ต้องให้ $y=0$

$$\frac{2}{3}x-0-6 = 0$$

$$\frac{2}{3}x = 6$$

$$x = 6\times\frac{3}{2}$$

$$x = 9$$

$\therefore$ เส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (9,0) <u>Ans..</u>

หาจุดตัดบนแกน Y ต้องให้ $x=0$

$$0-\frac{3}{4}y-6 = 0$$

$$-\frac{3}{4}y = 6$$

$$y = 6\times\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$y = -8$$

$\therefore$ เส้นตรงตัดแกน Y ที่จุด (0,-8) <u>Ans..</u>

พากเพียร เรียนรู้ ดูตัวอย่าง บันไดสู่ทางก้าวหน้า

ตัวอย่างที่ 1.22 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2,3) และมีความชัน $\frac{1}{2}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 3 &= \frac{1}{2}(x - 2) \\
2y - 6 &= x - 2 \\
2y - 6 - x + 2 &= 0 \\
-x + 2y - 4 &= 0 \\
x - 2y + 4 &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ x - 2y + 4 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.23 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (-3,-1) และขนานกับเส้นตรง 2x + 3y + 12 = 0

วิธีทำ หาความชันโดยใช้สูตร $m = \frac{-A}{B} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$

สมการเส้นตรงที่จะหา มี $m = \frac{2}{3}$ และผ่านจุด (-3,-1)

$$
\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - (-1) &= \frac{2}{3}(x - (-3)) \\
y + 1 &= \frac{2}{3}(x + 3) \\
3y + 3 &= 2x + 6 \\
-2x + 3y - 3 &= 0 \\
2x - 3y + 3 &= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore\ 2x - 3y + 3 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.24 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,-3) และ (-3,4)

วิธีทำ

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$$

$$y + 3 = \left(\frac{-3-4}{1+3}\right)(x - 1)$$

$$y + 3 = -\frac{7}{4}(x - 1)$$

$$4y + 12 = -7x + 7$$

$$7x + 4y + 5 = 0$$

$\therefore\ 7x + 4y + 5 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.25 จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด (-3,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,5)

วิธีทำ

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

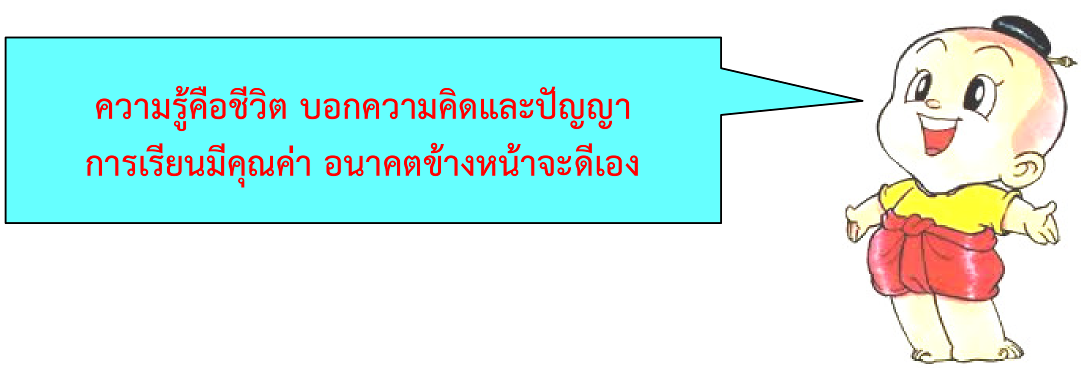
$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$$

นำ -15 มาคูณทั้งสองข้าง

$$5x - 3y = -15$$

$$5x - 3y + 15 = 0$$

$\therefore\ 5x - 3y + 15 = 0$ เป็นสมการเส้นตรงที่ต้องการ <u>Ans..</u>



แบบฝึกหัด 1.4

1. จงบอกความชันและจุดตัดแกน X และแกน Y

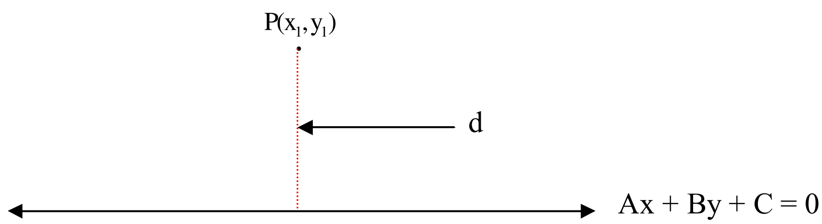
สมการ	ความชัน	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y
(1) $2x - 3y = 7$			
(2) $5x + 4y - 2 = 0$			
(3) $x - 4y + 5 = 0$			
(4) $3x + 2y + 7 = 0$			
(5) $5x - y - 11 = 0$			
(6) $\frac{3}{4}x - \frac{4}{3}y = 24$			
(7) $x - y = 0$			
(8) $2y + 3 = 0$			
(9) $x = 4$			
(10) $3(y - 1) = -2(x - 2)$			

2. จงแสดงว่าเส้นตรง $3y = 2x - 6$ ขนานกับเส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 1$
3. จงแสดงว่าเส้นตรง $2x + y = 8$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $y = \frac{1}{2}x - 5$
4. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0,-3) และมีความชันเป็น $-\frac{3}{4}$
5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (7,5) และขนานกับเส้นตรง $x + 2y + 12 = 0$
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (3,2) และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 2y + 12 = 0$
7. จงหาสมการเส้นตรง และ
   (1) ผ่านจุด (-1,0) และขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (1,2) และ (-3,4)
   (2) ผ่านจุด (-1,-4) และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด (-1,3) และ (-2,-2)
8. จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน X ที่จุด (5,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,-4)
9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (4,2) และตัดแกน Y ต่ำกว่าจุดกำเนิด 3 หน่วย
10. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกับครึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(-5,2) และ B(3,-2)

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

1.7 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด และระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน

1.7.1 ระยะระหว่างเส้นตรงกับจุด

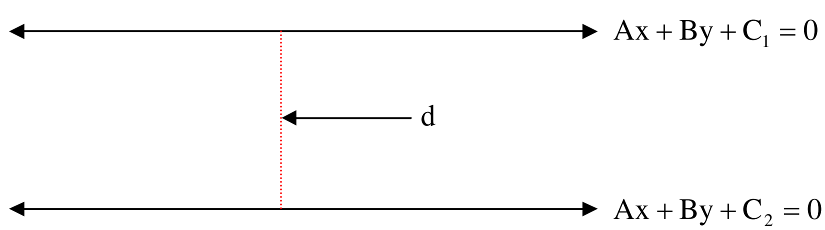


ทฤษฎีบท 1.5 :

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1) คือ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1.7.2 ระยะระหว่างเส้นคู่ขนาน



ทฤษฎีบท 1.6 :

ระยะห่างระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ และเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$ คือ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ตัวอย่างที่ 1.26 จงหาระยะห่างจากจุด (2,-3) ไปยังเส้นตรง $6x - 8y + 4 = 0$

วิธีทำ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|6(2) + (-8)(-3) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}}$$

$$= \frac{|12 + 24 + 4|}{\sqrt{36 + 64}}$$

$$= \frac{|40|}{\sqrt{100}}$$

$$= \frac{40}{10}$$

$= 4$ หน่วย <u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.27 จงหาระยะห่างจากจุดกำเนิด ไปยังเส้นตรง $3x - 4y - 5 = 0$

วิธีทำ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|3(0) + (-4)(0) + (-5)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$= \frac{|0 + 0 + (-5)|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$= \frac{|-5|}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{5}{5}$$

$= 1$ หน่วย <u>Ans..</u>

การศึกษา คือ ความเจริญงอกงาม

ตัวอย่างที่ 1.28 จงหาระยะห่างจากเส้นตรง $3x - y - 8 = 0$ ไปยังเส้นตรง $3x - y - 2 = 0$

วิธีทำ

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{|-8-(-2)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}}$$

$$= \frac{|-8+2|}{\sqrt{9+1}}$$

$$= \frac{|-6|}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}}$$

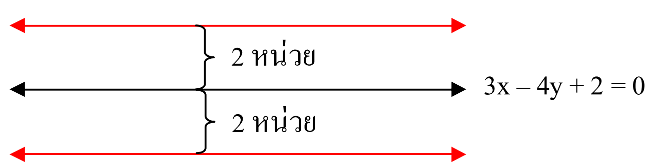
$$= \frac{6\sqrt{10}}{10}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{5}$$ หน่วย

<u>Ans..</u>

ตัวอย่างที่ 1.29 จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x - 4y + 2 = 0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 2 หน่วย

วิธีทำ เส้นตรงที่จะหามีสมการเป็น $3x - 4y + c = 0$



$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$2 = \frac{|c-2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}$$

$$2 = \frac{|c-2|}{\sqrt{25}}$$

$$10 = |c-2|$$

$$|c-2| = 10$$

จะได้	$c - 2$	=	10	หรือ	$c - 2$	=	-10
	c	=	$10 + 2$		c	=	$-10 + 2$
	c	=	12		c	=	-8

$\therefore$ สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $3x - 4y + 12 = 0$ และ $3x - 4y - 8 = 0$ <u>Ans..</u>

ครูเปิดประตูให้ แต่คุณต้องเดินเข้าไปด้วยตนเอง

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   (1) $6x - 8y + 4 = 0$ และ $(2,-3)$

   (2) $4x + 3y - 8 = 0$ และ $(0,6)$

   (3) $2x + 3y = 13$ และ $(0,0)$

   (4) $y - 4 = \frac{7}{5}(x - 3)$ และ $(8,11)$

   (5) $y = 1$ และ $(-1,1)$

2. จงหาระยะทางระหว่างเส้นคู่ขนานต่อไปนี้

   (1) $3x + 4y - 7 = 0$ และ $3x + 4y + 3 = 0$

   (2) $3x - 4y - 7 = 0$ และ $6x - 8y + 16 = 0$

   (3) $5x + 12y - 15 = 0$ และ $10x + 24y + 9 = 0$

   (4) $x - y - 3 = 0$ และ $3x - 3y + 7 = 0$

   (5) $3x + y + 5 = 0$ และ $7 - 3x - y = 0$

3. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x - 4y - 5 = 0$ และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 1 หน่วย
4. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $3x - 4y + 26 = 0$ และอยู่ห่าจากจุด $(8,8)$ เป็นระยะ 2 หน่วย
5. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $12y = 5x - 7$ และอยู่ห่างจากจุด $(-1,2)$ เป็นระยะ 3 หน่วย
6. ถ้าเส้นตรง $12x - 5y - 10 = 0$ เป็นเส้นตรงที่อยู่กึ่งกลางระหว่างเส้นขนานคู่หนึ่ง ซึ่งอยู่ห่างกัน 8 หน่วย จงหาสมการของเส้นขนานคู่นี้