

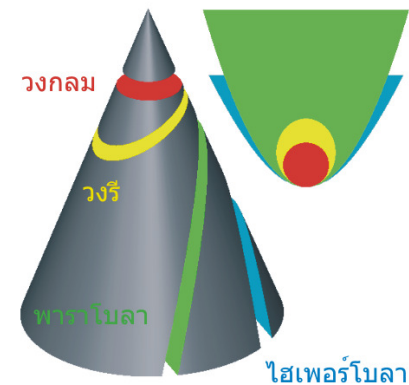
## บทที่ 2

### ภาคตัดกรวย (Conic Section)

ภาคตัดกรวย ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลมด้วยระนาบ ภาคตัดกรวยนี้ถูกตั้งเป็นหัวข้อศึกษาตั้งแต่สมัย 200 ปีก่อนคริสตศักราชโดย อพอลโลเนียส แห่งเพอร์กา ผู้ซึ่งศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติหลายประการของภาคตัดกรวย ต่อมาการศึกษาภาคตัดกรวยถูกนำไปใช้ประโยชน์หลายแบบ เช่น

ในปี พ.ศ. 2133 (ค.ศ. 1590) กาลิเลโอ กาลิเลอี พบว่าชิปนาวูทที่ยิงขึ้นไปในมุมที่กำหนดมีวิถีการเคลื่อนที่โค้งแบบพาราโบลา

ใน พ.ศ. 2152 (ค.ศ. 1609) โยฮันส์ เคปเลอร์ พบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์รอบนอกเป็นรูปวงรี เป็นต้น



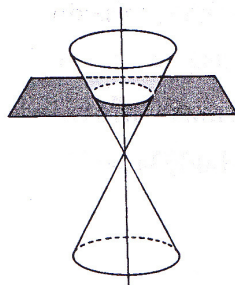
ในการศึกษาภาคตัดกรวยโดยใช้เรขาคณิตวิเคราะห์ มีประเด็นหลักที่เราจะศึกษา 2 ประเด็น คือ

1. หาสมการของภาคตัดกรวยแต่ละชนิด
2. จำแนกหรือระบุว่ากราฟของสมการเป็นภาคตัดกรวยชนิดใด แล้วเขียนกราฟของสมการ

เมื่อกำหนดสมการแบบทั่วไปของภาคตัดกรวย

## 2.1 วงกลม (Circle)

เกิดจากการนำระนาบตัดกับกรวยให้ขนานกับฐาน ดังรูป



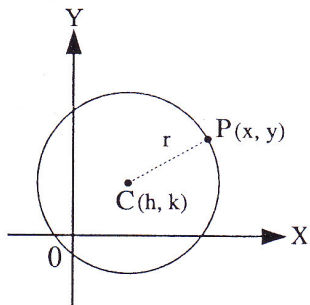
**บทนิยาม 2.1 :**

**วงกลม** คือ เซตของจุดทุกบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางคงที่เสมอ  
**จุดคงที่** เรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม (center)

**ระยะทางคงที่** เรียกว่า รัศมีของวงกลม (radius)

ในทางคณิตศาสตร์ ถือว่าวงกลมเป็นเส้นโค้งที่สมบูรณ์ เครื่องใช้ต่างๆ ของเรามักมีลักษณะเป็นวงกลม เช่น ขันตักน้ำ หน้าปัดนาฬิกา จานข้าว ถาด กระโถน เงินเหรียญ ท่านลองตรวจดูของใช้รอบกาย และทั่วๆ ไป จะเห็นว่าการใช้ของที่มีลักษณะเป็นวงกลมนั้นให้ความสะดวกมากที่สุด ลองนึกดูว่าถ้า ล้อจักรยานยนต์ ล้อรถยนต์ ไม่มีลักษณะเป็นวงกลมแล้ว การเคลื่อนที่จะลำบากสักเพียงใด





จากรูป ให้  $P(x,y)$  เป็นจุดใดๆ บนวงกลม และ  $C(h,k)$  เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง  $P(x,y)$  และ  $C(h,k)$  เท่ากับ  $r$  หน่วย นั่นคือ  $|PC|=r$  หน่วย ดังนั้นจากสูตรการหา ระยะทางระหว่างจุดสองจุดจะได้

$$\begin{aligned} |PC| &= r \\ \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} &= r \end{aligned}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ถ้าให้จุดศูนย์กลางคือ จุด  $(0,0)$  จะได้

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{จาก } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x^2 - 2hx + h^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = r^2$$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

ให้  $D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$  จะได้

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

รูปแบบของวงกลม มี 3 รูปแบบ คือ

1. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(0,0)$  รัศมียาว  $r$  หน่วย

มีรูปแบบเป็น  $x^2 + y^2 = r^2$

2. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(h,k)$  รัศมียาว  $r$  หน่วย

มีรูปแบบเป็น  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

3. วงกลมที่อยู่ในรูปแบบทั่วไป

มีรูปแบบเป็น  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

เมื่อ  $D, E, F$  เป็นค่าคงตัวใด จะหาจุดศูนย์กลางและรัศมีได้ต้องจัดให้อยู่ในรูปแบบที่ 2 เสียก่อน หรืออาจใช้สูตร

$$\text{จุดศูนย์กลาง คือ } \left( -\frac{D}{2}, -\frac{E}{2} \right)$$

$$\text{รัศมี คือ } \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

**ตัวอย่างที่ 2.1** จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(0,0)$  รัศมียาว 3 หน่วย

วิธีทำ

มีรูปแบบเป็น  $x^2 + y^2 = r^2$

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 = 9$

Ans.



ตัวอย่างที่ 2.2 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (3,0) รัศมียาว  $\frac{1}{2}$  หน่วย

วิธีทำ มีรูปแบบเป็น  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(x^2 - 6x + 9) + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

นำ 4 มาคูณทั้งสองข้าง

$$4x^2 - 24x + 36 + 4y^2 - 1 = 0$$

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 35 = 0$$

∴ สมการวงกลม คือ  $4x^2 + 4y^2 - 24x + 35 = 0$

Ans.



ตัวอย่างที่ 2.3 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (-3,-4) รัศมียาว 5 หน่วย

วิธีทำ มีรูปแบบเป็น  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 5^2$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 25$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$

Ans.

ตัวอย่างที่ 2.4 จากสมการวงกลม  $x^2 + y^2 - 6x - 7 = 0$  จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 9) + y^2 &= 7 + 9 \\(x - 3)(x - 3) + (y - 0)^2 &= 16 \\(x - 3)^2 + (y - 0)^2 &= 4^2\end{aligned}$$

เทียบกับรูป  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้  $h = 3, k = 0, r = 4$

∴ สมการวงกลมที่กำหนดให้ มีจุดศูนย์กลางที่ (3,0) และรัศมียาว 4 หน่วย

Ans..

ตัวอย่างที่ 2.5 จากสมการวงกลม  $x^2 + y^2 - 6x + 4y = 3$  จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) &= 3 + 9 + 4 \\(x - 3)(x - 3) + (y + 2)(y + 2) &= 16 \\(x - 3)^2 + (y + 2)^2 &= 4^2\end{aligned}$$

เทียบกับรูป  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้  $h = 3, k = -2, r = 4$

∴ สมการวงกลมที่กำหนดให้ มีจุดศูนย์กลางที่ (3,-2) และรัศมียาว 4 หน่วย

Ans..

ตัวอย่างที่ 2.6 จากสมการวงกลม  $x^2 + y^2 - 6y = 3$  จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

วิธีทำ

$$\begin{aligned}x^2 + (y^2 - 6y + 9) &= 3 + 9 \\(x - 0)^2 + (y - 3)(y - 3) &= 12 \\(x - 0)^2 + (y - 3)^2 &= (\sqrt{12})^2 \\(x - 0)^2 + (y - 3)^2 &= (2\sqrt{3})^2\end{aligned}$$

เทียบกับรูป  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้  $h = 0, k = 3, r = 2\sqrt{3}$

∴ สมการวงกลมที่กำหนดให้ มีจุดศูนย์กลางที่ (0,3) และรัศมียาว  $2\sqrt{3}$  หน่วย

Ans..

**ตัวอย่างที่ 2.7** จากสมการวงกลม  $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y + 3 = 0$  จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

**วิธีทำ**

$$x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x + 2y = -\frac{3}{2}$$

$$\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) - (y^2 + 2y + 1) = -\frac{3}{2} + \frac{9}{16} + 1$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + (y+1)(y+1) = \frac{1}{16}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + (y+1)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

**เทียบกับรูป**  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

**จะได้**  $h = \frac{3}{4}, k = -1, r = \frac{1}{4}$

$\therefore$  สมการวงกลมที่กำหนดให้ มีจุดศูนย์กลางที่  $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$  และรัศมียาว  $\frac{1}{4}$  หน่วย Ans.

**ตัวอย่างที่ 2.8** จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(-3, 2)$  มีเส้นรอบวงยาว  $12\pi$  หน่วย

**วิธีทำ**

จาก เส้นรอบวง =  $2\pi r$

$$12\pi = 2\pi r$$

$$\frac{12\pi}{2\pi} = r$$

$$6 = r$$

**มีรูปแบบเป็น**  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 6^2$$

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

$\therefore$  สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$  Ans.

**ตัวอย่างที่ 2.9** จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (2,5) มีเส้นรอบวงยาว (-2,3) หน่วย

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{จาก } r &= \sqrt{(2+2)^2 + (5-3)^2} \\ r &= \sqrt{(4)^2 + (2)^2} \\ r &= \sqrt{16+4} \\ r &= \sqrt{20} \end{aligned}$$

**มีรูปแบบเป็น**

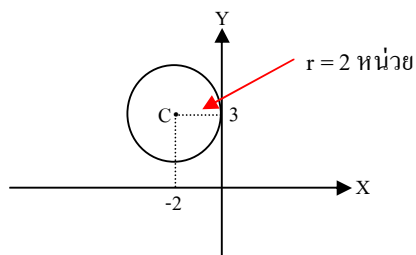
$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-2)^2 + (y-5)^2 &= (\sqrt{20})^2 \\ (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 10y + 25) &= 20 \\ x^2 + y^2 - 4x - 10y + 29 - 20 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 10y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 9 = 0$

Ans..

**ตัวอย่างที่ 2.10** จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (-2,3) มีแกน Y เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

**วิธีทำ**



**มีรูปแบบเป็น**

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 &= 2^2 \\ (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) &= 4 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 - 4 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 &= 0 \end{aligned}$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$

Ans..



ตัวอย่างที่ 2.11 จงหาสมการวงกลมที่จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ (2,2) และ (-6,-4)

วิธีทำ

หาจุดศูนย์กลางจาก

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2 + (-4)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

ซึ่งคือจุด (-2,-1)

$$\text{หารัศมีจากสูตร } r = \sqrt{(-2-2)^2 + (-1-2)^2}$$

$$r = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{16+9}$$

$$r = \sqrt{25}$$

$$r = 5$$

มีรูปแบบเป็น  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 2y + 1) = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

Ans..



**ตัวอย่างที่ 2.12** จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง  $(-1,1)$  และสัมผัสเส้นตรง  
 $3x - 2y + 18 = 0$

**วิธีทำ**

$$\begin{aligned} \text{หารัศมีจากสูตร } r &= \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ r &= \frac{|3(-1) + (-2)(1) + 18|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2}} \\ r &= \frac{|-3 - 2 + 18|}{\sqrt{9 + 4}} \\ r &= \frac{|13|}{\sqrt{13}} \\ r &= \frac{13}{\sqrt{13}} \\ r &= \sqrt{13} \text{ หน่วย} \end{aligned}$$

มีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 &= (\sqrt{13})^2 \\ (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) &= 13 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - 13 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

∴ สมการวงกลม คือ  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

Ans..



ตัวอย่างที่ 2.13

จงหาจุดตัดของกราฟ  $x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0$  และ

$$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0$$

วิธีทำ

แก้สมการหาจุดตัด

$$x^2 + y^2 - 7x - 2y + 7 = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$3x^2 + 3y^2 - 7x + y = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

นำ  $3 \times (1)$ 

$$3x^2 + 3y^2 - 21x - 6y + 21 = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

นำ  $(2) - (3)$ 

$$14x + 7y - 21 = 0$$

นำ 7 มาหารทั้งสองข้าง

$$2x + y - 3 = 0$$

$$y = 3 - 2x \quad \dots\dots\dots(4)$$

แทน  $y$  ใน (1)

$$x^2 + (3 - 2x)^2 - 7x - 2(3 - 2x) + 7 = 0$$

$$x^2 + 9 - 12x + 4x^2 - 7x - 6 + 4x + 7 = 0$$

$$5x^2 - 15x + 10 = 0$$

นำ 5 มาหารทั้งสองข้าง

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x - 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 2, 1$$

แทน  $y$  ใน (4)

$$\text{ถ้า } x = 2 \text{ แล้ว } y = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$$

$$\text{ถ้า } x = 1 \text{ แล้ว } y = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1$$

$\therefore$  จุดตัดของกราฟของกราฟทั้งสอง คือ  $(2, -1)$  และ  $(1, 1)$

Ans.

### แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
  - (1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(2,-1)$  และรัศมียาว 3 หน่วย
  - (2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และผ่านจุด  $(7,4)$
  - (3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-1,5)$  และผ่านจุด  $(-4,-6)$
  - (4) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ  $(-1,3)$  และ  $(7,-5)$
  - (5) วงกลมอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และสัมผัสแกน X และแกน Y รัศมียาว 5 หน่วย
2. จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม
  - (1)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
  - (2)  $x^2 + y^2 + y = 0$
  - (3)  $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 13 = 0$
  - (4)  $x^2 + y^2 + x + 2y + 1 = 0$
  - (5)  $x^2 + y^2 + 6x + 2 = 0$
  - (6)  $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8} = 0$
3. จงหาสมการวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด  $(-1,1)$  และสัมผัสกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น  $3x - 2y + 18 = 0$
4. จงหาจุดตัดของกราฟ  $x + y = 1$  และ  $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$
5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่นอกวงกลม  $x^2 + y^2 = 4$  แต่อยู่ภายในวงกลม  $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$
6. จงหาสมการเส้นสัมผัสของวงกลมที่มีสมการเป็น  $x^2 + y^2 - 10x = 0$  ณ จุดที่ตัดวงกลมตัดเส้นตรง  $4x + 3y = 20$
7. ถ้าวางกลม  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + k = 0$  มีรัศมียาว 4 หน่วยแล้ว จงหาค่า  $k$

