บทที่ 3

ระบบสมการเชิงเส้น (System of Linear Equations)

3.1 การดำเนินการตามแถว (Row operation)

ก่อนจะพิจารณาเกี่ยวกับการประยุกต์ใช้เมทริกซ์และดีเทอร์มิแนนท์ไปใช้แก้ปัญหาในเรื่องระบบสมการเชิงเส้น ขอกล่าวถึงกระบวนการสำคัญอย่างหนึ่งเพื่อการลดรูปของเมทริกซ์เพื่อให้ง่ายต่อการนำไปใช้ต่อไป

บทนิยาม 3.1 :
กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ การดำเนินการตามแถวบน A คือ การกระทำบนเมทริกซ์เพื่อให้เกิดเมทริกซ์ใหม่โดยวิธีการใดวิธีการหนึ่งต่อไปนี้

(1) สลับแถวสองแถวใดๆ ของ A

(2) คูณแถวใดแถวหนึ่งของ A ด้วยค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์

(3) บวกแถวใดแถวหนึ่งของ A ด้วยพหุคูณของอีกแถวหนึ่ง

ถ้า B เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการดำเนินการตามแถวบน A เป็นจำนวนจำกัดครั้ง จะกล่าวว่า B สมมูลแถวกับ A เขียนแทนด้วย $A \sim B$

ตัวอย่างที่ 3.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A \sim I_2$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 \to \frac{R_2}{-5}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} R_1 \to R_1 - 3R_2$$

ดังนั้น $A \sim I_2$ ตามต้องการ Ans..

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $A \sim I_3$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} R_3 \to R_3 - 3R_1$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 3 & -11 \end{bmatrix} R_2 \to -R_2 + R_3$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - R_2 \\ \\ R_3 \to R_3 - 3R_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 \to R_1 - 6R_3 \\ R_2 \to R_2 + 4R_3 \\ \\ \end{matrix}$$

ดังนั้น $A \sim I_3$ ตามต้องการ <u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนดให้ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $B \sim I_3$
2. กำหนดให้ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $C \sim I_3$
3. กำหนดให้ $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $C \sim I_4$

3.2 ระบบสมการเชิงเส้น

เราสามารถนำระบบสมการเชิงเส้นไปแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้หลายเรื่อง ในที่นี้จะให้บทนิยามของระบบสมการเชิงเส้นไว้ดังนี้

บทนิยาม 3.1 :

ให้ a, b, c, d, e, f เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ a, b และ c, d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เรียก $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ ว่า **ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร**

โดยที่ x และ y เป็นตัวแปร

ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปรอาจมีคำตอบเดียว หรือมีหลายคำตอบ หรือไม่มีคำตอบก็ได้

ในหัวข้อนี้จะศึกษาระบบสมการเชิงเส้น n ตัวแปร โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

บทนิยาม 3.2 :

ให้ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เรียก $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + ... + a_nx_n = b$ ว่าเป็นสมการเชิงเส้น n ตัวแปร

โดยที่ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร

3.2.1 ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

บทนิยาม 3.3 :

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร หมายถึงชุดของสมการเชิงเส้นที่มี $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นตัวแปร จำนวน m สมการ โดยที่ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 มีรูปแบบเป็น

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + ... + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + ... + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3.3 ตัวอย่างของระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปร

(1) ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร

$$x + 3y = 8$$
$$x - 2y = 3$$

(2) ระบบสมการเชิงเส้นสามตัวแปร

$$x + y = 2$$
$$x + 3y + z = 5$$
$$3x + y - z = 3$$

(3) ระบบสมการเชิงเส้นสี่ตัวแปร

$$2x + 2y + 3z + 2t = 11$$
$$x + y + 2z + 2t = 6$$
$$2y + 5z + 2t = 5$$
$$x + y + 3z + 4t = 1$$

3.2.2 การแทนระบบสมการเชิงเส้นด้วยเมทริกซ์

บทนิยาม 3.4 :

ระบบสมการเชิงเส้น

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n &= b_3 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ โดยที่

A คือ เมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการ

X คือ เมทริกซ์ของตัวไม่ทราบค่าของระบบสมการ

B คือ เมทริกซ์ของค่าคงที่ของระบบสมการ

นั่นคือ

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}
\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{X}}
=
\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}
$$

ตัวอย่างที่ 3.4 จงแทนระบบสมการต่อไปนี้ด้วยเมทริกซ์

$$
\begin{aligned}
2x + 2y + 3z + 2t &= 11 \\
x + y + 2z + 2t &= 6 \\
2y + 5z + 5t &= 5 \\
x + y + 3z + 4t &= 1
\end{aligned}
$$

วิธีทำ จากระบบสมการที่กำหนดให้ พบว่าเป็นระบบที่มี 4 สมการ 4 ตัวแปร เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น

$$
\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Ans..

แบบฝึกหัด 3.2 (ก)

จงเขียนเมทริกซ์ที่แทนด้วยระบบสมการเชิงเส้นในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x + 3y = 8$

   $x - 2y = 3$

2. $x + y = 2$

   $x + 3y + z = 5$

   $3x + y - z = 3$

3. $2x - 3y + z = 2$

   $-x + 4y + 2z = -4$

   $3x - y + 2x = 9$

4. $3m + 2n - p + q = 4$

   $m + 2n - 2p + 3q = 6$

   $n - 3p - q = -1$

   $2m + 5n - p + 3q = 3$

℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘ ℘

3.2.3 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้กฎของคราเมอร์

ทฤษฎีบท 3.1 :

เมื่อกำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร

โดยที่ $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ ที่สัมพันธ์กับระบบสมการนี้

$$\text{ให้} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว คำตอบของระบบสมการคือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad , \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad , \quad \dots \quad , \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_i คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B ทุก $i = \{1,2,3,\dots,n\}$

ตัวอย่างที่ 3.5 จงแก้ระบบสมการที่กำหนดให้ โดยใช้กฎของคราเมอร์

$3x + 2y = 1$

$x + y = 0$

วิธีทำ เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น $AX = B$ คือ

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(2) = 3 - 2 = 1$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (0)(2) = 1 - 0 = 1$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (3)(0) - (1)(1) = 0 - 1 = -1$$

เพราะฉะนั้น $x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)} = \dfrac{1}{1} = 1 \quad , \quad x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \dfrac{-1}{1} = -1$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ (1 , –1) Ans..

ตัวอย่างที่ 3.6 จงแก้ระบบสมการที่กำหนดให้ โดยใช้กฎของคราเมอร์

$$2x + y + 2z = 3$$

$$x + y - z = -\frac{1}{2}$$

$$3x + 2y - 2z = -2$$

วิธีทำ เขียนสมการเมทริกซ์ได้เป็น AX = B คือ

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 3 + 4) - (6 - 4 - 2) = -3 - 0 = -3$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-6 + 2 - 2) - (-4 - 6 + 1) = (-6) - (-9) = 3$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 9 - 4) - (-3 + 4 - 6) = (-11) - (-5) = -6$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - \frac{3}{2} + 6) - (9 - 2 - 2) = -\frac{9}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{3}{-3} = -1$,

$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-6}{-3} = 2$,

$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-\frac{9}{2}}{-3} = \left(-\frac{9}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $\left(-1, 2, \frac{3}{2}\right)$ <u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 3.2 (ข)

จงใช้กฎของคราเมอร์แก้ระบบสมการต่อไปนี้

1. $$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 3 \\ x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y - 5z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

คราเมอร์ กาบรีเอิล (Cramer Gabriel) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวสวิตเซอร์แลนด์ (ปี ค.ศ.1704 – 1752) ผู้ค้นพบหลักเกณฑ์ที่นำไปสู่การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้ตัวกำหนดของเมทริกซ์ A_i (Determinant of A_i) โดยที่ $i = 1,2,3,\ldots,n$ เมื่อ A_i คือ เมทริกซ์ที่ได้จากการแทนที่หลัก i ของเมทริกซ์ A ด้วยสมาชิกในเมทริกซ์ B

3.2.5 การแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการตามแถว

บทนิยาม 3.5 :

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และ n ตัวแปร

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix) ของระบบสมการนี้คือ

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

กระบวนการแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรโดยใช้การดำเนินการตามแถว สามารถสรุปได้อย่างง่ายๆ คือ จะต้องใช้การดำเนินการตามแถวลดรูปเมทริกซ์เดิมให้เหลือ $\left[I_n \;\vdots\; X\right]$ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 3.7 จงหาคำตอบของระบบสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 5 \\ 2x - 5y - 5z &= 0 \\ 3x + 2y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

วิธีทำ ใช้การดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์แต่งเติมหาคำตอบของระบบสมการ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -5 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -9 & -7 & -10 \\ 0 & -4 & -6 & -16 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 2 & 3 & 8 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \to R_1 + \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_3 \to -\frac{1}{2}R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 13 & 52 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3 \to R_3 + 2R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ \\ R_3 \to \frac{1}{13}R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \to R_2 + 2R_3 \\ R_2 \to -R_2 + 5R_3 \\ R_3 \to \frac{1}{13}R_3 \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(5 , -2 , 4)$ <u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 3.2 (ค)

จงหาคำตอบของสมการเชิงเส้นในข้อต่อไปนี้

1. $x + y + 2z = 9$

   $2y - 7z = -17$

   $3x + 6y - 5z = 0$

2. $x + y + 2z = 9$

   $2x + 4y - 3z = 1$

   $3x + 6y - 5z = 0$

3. $w - x + y - z = -4$

   $4w - x + 3y + z = -8$

   $2w + x + y - z = 0$

   $3w + 2x + y - 3z = 1$

3.3 การหาเมทริกซ์ผกผันโดยใช้การดำเนินการตามแถว

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $n \times n$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน เราสามารถหา A^{-1} ได้โดยสร้างเมทริกซ์แต่งเติม $[A \;\vdots\; I_n]$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times 2n$ จากนั้นจึงใช้การดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์แต่งเติมนี้ เพื่อเปลี่ยนให้ n หลักแรก (เมทริกซ์ A) กลายเป็น I_n และเราจะได้ว่า A^{-1} ก็คือเมทริกซ์ที่ปรากฏอยู่ใน n หลักสุดท้ายของ $[A \;\vdots\; I_n]$ นั่นคือ

$$[A \;\vdots\; I_n] \sim [I_n \;\vdots\; A^{-1}]$$

ตัวอย่างที่ 3.8 จงหาเมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

วิธีทำ เนื่องจาก det(A) = (0 + 6 +0) – (0 + 2 + 3) = 1 ซึ่งไม่เท่ากับ 0
แสดงว่า A มี A^{-1}

$$[A \;\vdots\; I_n] \sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - 6R_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_3 \to R_3 - 4R_2 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_2 \to R_2 + R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right] R_1 \to R_1 + R_2$$

ดังนั้น $A^{-2} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ <u>Ans..</u>

แบบฝึกหัด 3.3

จากเมทริกซ์ A ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหา A^{-1} (ถ้ามี) โดยวิธีการดำเนินการตามแถว

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

บรรณานุกรม

กมล เอกไทยเจริญ. 2537. **คณิตศาสตร์ ม.4 เล่ม 4**. กรุงเทพฯ : ไฮเอ็ดพับลิชชิง.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2547. **หนังสือเรียนสาระเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว.

สัทธา หาญวงศ์ฤทธิ์. **เมทริกซ์**. [ออนไลน์]. เข้าถึงได้จาก : http://www.thai-mathpaper.net. (วันที่ค้นข้อมูล : 25 กรกฎาคม 2553).

สุชีพ งามเจริญ และไอศุริย สุดประเสริฐ. 2552. **ที่สุดคณิตศาสตร์ ม.ปลาย O-NET & PAT 1**. กรุงเทพฯ : สำนักพิมพ์ธรรมบัณฑิต.

໑ ໑ ໑ ໑ ໑ ໑ ໑ ໑ ໑